● 問題 457 解答＜三角定規＞

［１問目］ $I=\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

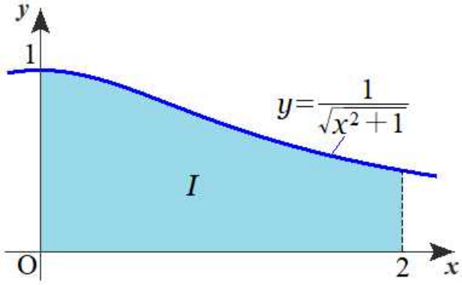
まずは, 最もポピュラーな（？）置換を。

$x+\sqrt{x^2+1}=u$ と置くと, $x^2+1=(u-x)^2$ より $x=\frac{u}{2}-\frac{1}{2u}$, $dx=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2u^2}\right)du=\frac{u^2+1}{2u^2}du$

$\sqrt{x^2+1}=u-x=\frac{u}{2}+\frac{1}{2u}=\frac{u^2+1}{2u}$, $x\in[0, 2] \Leftrightarrow u\in[1, 2+\sqrt{5}]$

$\therefore\ I=\int_1^{2+\sqrt{5}} \frac{2u}{u^2+1}\cdot\frac{u^2+1}{2u^2}du=\int_1^{2+\sqrt{5}} \frac{du}{u}=[\log u]_1^{2+\sqrt{5}}$

$=\mathbf{log(2+\sqrt{5})}$ $(=1.443\cdots)$ …[答]



〈別解〉 上とほぼ同じですが, こちらは大学生好み？

$x=\frac{e^u-e^{-u}}{2}$ と置くと, $dx=\frac{e^u+e^{-u}}{2}du$

$x^2+1=\frac{e^{2u}-2+e^{-2u}}{4}+1=\frac{e^{2u}+2+e^{-2u}}{4}=\left(\frac{e^u+e^{-u}}{2}\right)^2$

$x=0$ のとき $u=0$, $x=2$ のとき $e^u-e^{-u}=4$ より $u=\log(2+\sqrt{5})$

$\therefore\ I=\int_0^{\log(2+\sqrt{5})} \frac{2}{e^u+e^{-u}}\cdot\frac{e^u+e^{-u}}{2}du=\int_0^{\log(2+\sqrt{5})} du=\mathbf{log(2+\sqrt{5})}$

［２問目］ 便宜にて, θ を x と書くことにします。

$I=\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^3 x}=\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{\cos^4 x}dx=\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{(1-\sin^2 x)^2}dx$

$\sin x=u$ と置くと, $\cos x dx=du$, $x\in\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \Leftrightarrow u\in\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

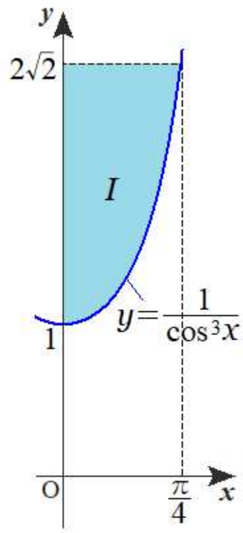
$\therefore\ I=\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{du}{(1-u^2)^2}=\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{du}{(1+u)^2(1-u)^2}$

$=\frac{1}{4}\int_0^{1/\sqrt{2}} \left\{\frac{1}{1+u}+\frac{1}{(1+u)^2}+\frac{1}{1-u}+\frac{1}{(1-u)^2}\right\}du$

$=\frac{1}{4}\left[\log(1+u)-\frac{1}{1+u}-\log(1-u)+\frac{1}{1-u}\right]_0^{1/\sqrt{2}}$

$=\frac{1}{4}\log\frac{1+1/\sqrt{2}}{1-1/\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1/\sqrt{2}}{1-(1/\sqrt{2})^2}$

$=\mathbf{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\log(\sqrt{2}+1)}$ $(=1.147\cdots)$ …[答]



［３問目］ 便宜にて，α，β を a, b と書くことにします。

$$I=\int_a^b \cos\left(x-\frac{ab}{x}\right)dx=\int_a^b\left\{\cos x\cos\frac{ab}{x}+\sin x\sin\frac{ab}{x}\right\}dx \quad \cdots①$$

①の第 1 項 $=\int_a^b (\sin x)'\cos\frac{ab}{x}dx$

$$=\left[\sin x\cos\frac{ab}{x}\right]_a^b-\int_a^b \sin x\cdot\left(-\sin\frac{ab}{x}\right)\left(-\frac{ab}{x^2}\right)dx$$

$$=\sin b\cos a-\cos b\sin a-\int_a^b \frac{ab}{x^2}\sin x\sin\frac{ab}{x}dx$$

$$=\sin(b-a)-\int_a^b \frac{ab}{x^2}\sin x\sin\frac{ab}{x}dx \quad \cdots②$$

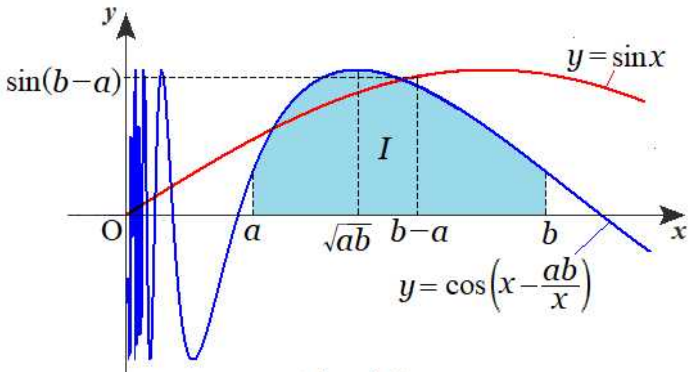
②の第 2 項で $\frac{ab}{x}=u$ と置くと，$x\in[a, b] \Leftrightarrow u\in[b, a]$, $-\frac{ab}{x^2}dx=du$ であるから

②の第 2 項 $=\int_b^a \sin\frac{ab}{u}\sin u\,du=-\int_a^b \sin x\sin\frac{ab}{x}dx \quad \cdots③$

③は①の第 2 項と相殺する。

以上より，

$$I=\int_a^b \cos\left(x-\frac{ab}{x}\right)dx=\mathbf{sin(}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\mathbf{)} \quad \cdots[答]$$



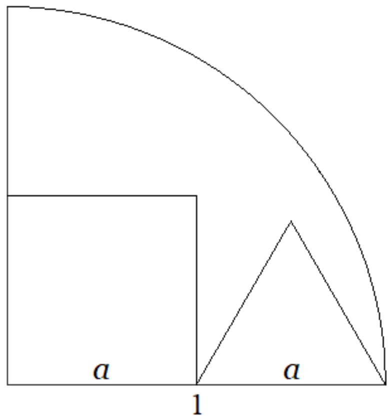
（↑一例）

《追加問題》

［問題１］

求める 1 辺の長さを a とすると,

$2a=1$ ∴ $a=\mathbf{\frac{1}{2}}$ …[答]



［問題２］

求める 1 辺の長さを a とすると,

$(2a)^2+a^2=1$ ∴ $5a^2=1$, $a=\mathbf{\frac{1}{\sqrt{5}}}$ $(=0.447\cdots)$ …[答]