[x の値域]

問題

（１）関数 $f(t)=\dfrac{t^2-3}{t^3}$ （$t \neq 0$）の増減を調べ，グラフの概形を描け。

（２）実数 x,y,zが次の４つの条件を満たしながら動くとき ,xのとり得る値の範囲を求めよ。

$x<y<z$・・・①

$xyz \neq 0$・・・②

$x^3y^2-3x^3=x^2y^3-3y^3$・・・③

$y^3z^2-3y^3=y^2z^3-3z^3$・・・④

（１） $f(t)=\dfrac{t^2-3}{t^3}$ （$t \neq 0$）

$f(-t)=-f(t)$であるので，関数$f(t)$は奇関数である．故に$t<0$の部分のグラフは，$t>0$の部分のグラフを原点に関して対称移動したものである．

$t>0$で考える．

$$f'(t)=\frac{2t\cdot t^3-(t^2-3)\cdot 3t^2}{t^6}=\frac{2t^2-3(t^2-3)}{t^4}$$

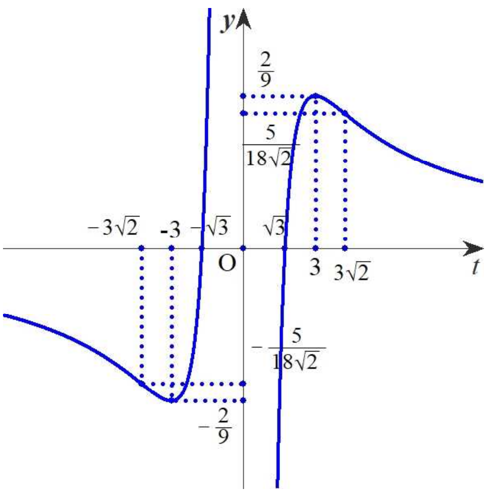
$$=-\frac{t^2-9}{t^4}=-\frac{(t+3)(t-3)}{t^4}$$

$$f''(t)=-\frac{2t\cdot t^4-(t^2-9)\cdot 4t^3}{t^8}=\frac{2(t^2-18)}{t^5}$$

増減表は，

t	0	……	3	……	$3\sqrt{2}$	……	∞
$f'(t)$	∞	＋	0	−	−	−	0
$f''(t)$		−	−	−	0	＋	
$f(t)$	−∞	↗	$2／9$	↘	$5／18\sqrt{2}$	↘	0

$-\infty<t<\infty$でのグラフは，



$-3 \leqq t<0$， $0<t \leqq 3$のとき，増加

$t \leqq -3$， $3 \leqq t$のとき，減少

（２） $x < y < z$ ・・・・・・・・・・・・・①

$xyz \neq 0$ ・・・・・・・・・・・・・②

$x^3y^2 - 3x^3 = x^2y^3 - 3y^3$ ・・・③

$y^3z^2 - 3y^3 = y^2z^3 - 3z^3$ ・・・④

②，③，④より，$\dfrac{x^2-3}{x^3} = \dfrac{y^2-3}{y^3} = \dfrac{z^2-3}{z^3}$ ・・・⑤

（１）より，$f(x) = f(y) = f(z)$

$f(x) = f(y) = f(z) = a$，$0 < a < \dfrac{2}{9}$ とすると，①と（１）のグラフより，

$-\sqrt{3} < x < 0$，$\sqrt{3} < y < 3 < z$

$f(x) = \dfrac{2}{9}$，$-\sqrt{3} < x < 0$ とすると，

$\dfrac{x^2-3}{x^3} = \dfrac{2}{9}$　　$\therefore 9(x^2-3) = 2x^3$

$\therefore 2x^3 - 9x^2 + 27 = 0$

$\therefore (x-3)^2(2x+3) = 0$

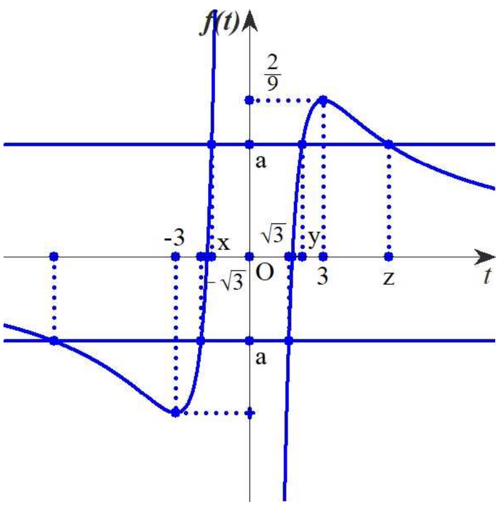
$-\sqrt{3} < x < 0$ より，$x = -\dfrac{3}{2}$

グラフより，$-\sqrt{3} < x < -\dfrac{3}{2}$，$\sqrt{3} < y < 3 < z$

$f(x) = f(y) = f(z) = a$，$-\dfrac{2}{9} < a < 0$ とすると，同様に，

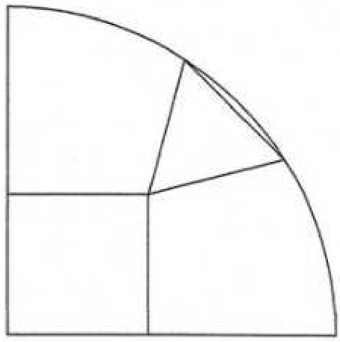
$x < -3 < y < -\sqrt{3}$，$\dfrac{3}{2} < z < \sqrt{3}$

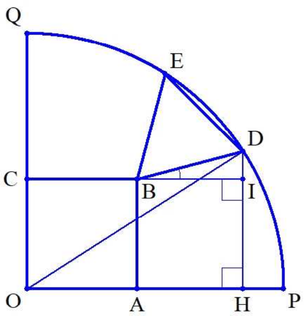
以上より，$x < -3$，$-\sqrt{3} < x < -\dfrac{3}{2}$ ・・・（答）



追加問題（出題者は「ジョーカー」）　新作シリーズ
四分円内の正方形と正三角形の1辺について『２』
問題１　　シリーズ３問目
正方形と正三角形の1辺が等しいとき（辺を共有しない），

半径１の四分円内に，図のように辺の長さが等しい正方形と正三角形が配置されている。
１辺の長さを求めよ。





図のように点Ｏ，Ｐ，Ｑ，Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅを定める．

ＤからＯＰに垂線ＯＨを下ろし，ＢからＤＨに垂線ＢＩを下ろす．

ＯＡ＝ＡＢ＝ＢＤ＝ｒとする．

直角三角形ＤＢＩにおいて，∠ＤＢＩ＝１５°であるから，

$$DI = BD\sin 15^\circ = r\cdot\sqrt{(1-\cos 30^\circ)/2} = r\sqrt{(2-\sqrt{3})/4}$$

$$= \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}}r = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}r$$

$$BI = BD\cos 15^\circ = r\cdot\sqrt{(1+\cos 30^\circ)/2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}r = AH$$

$$\therefore OH = OA + AH = r + \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}r = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}r,$$

$$DH = DI + IH = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}r + r = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}r$$

$OD^2 = OH^2 + DH^2$より，

$$1 = \left(\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}r\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}r\right)^2$$

$$\therefore r^2=\frac{8}{\{(2\sqrt{2}+\sqrt{3})^2+2(2\sqrt{2}+\sqrt{3})+1\}+\{(2\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-2(2\sqrt{2}+\sqrt{3})+1\}}$$

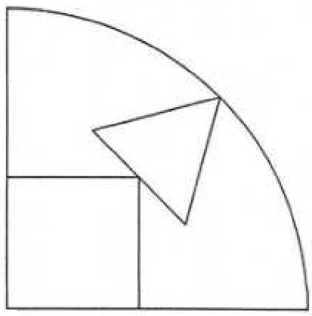
$$=\frac{8}{2(8+4\sqrt{6}+3)+2}=\frac{1}{3+\sqrt{6}}=\frac{3-\sqrt{6}}{3}$$

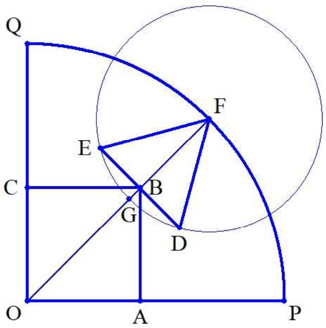
$r>0$ より，$r=\sqrt{(3-\sqrt{6})/3}$・・・（答）

問題２　シリーズ４問目

正方形と正三角形の1辺が等しいとき（辺を共有しない），

半径１の四分円内に，図のように辺の長さが等しい正方形と正三角形が配置されている。
１辺の長さを求めよ。
ただし，正三角形は四分円の中心角の二等分線に関して対称である。





図のように点Ｏ，Ｐ，Ｑ，Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅ，Ｆを定める．

《円Ｆ，点Ｇは作図の為に描いたもので，解答には関係ありません》

$OA=AB=DE=r$ とすると，

$$OF=OB+BF=\sqrt{2}\,r+\frac{\sqrt{3}}{2}r=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}r=1$$

$$\therefore r=\frac{2}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{2(2\sqrt{2}-\sqrt{3})}{5}$$・・・（答）