第 458 回

問題

(1)　関数 $f(t)=\dfrac{t^2-3}{t^3}$ （ $t\fallingdotseq 0$ ）の増減を調べ，グラフの概形を描け。

(2)　実数 x，y，z が次の 4 つの条件を満たしながら動くとき， x のとり得る値の範囲を求めよ。

$x<y<z$　…①

$xyz\fallingdotseq 0$　…②

$x^3y^2-3x^3=x^2y^3-3y^3$　…③

$y^3z^2-3y^3=y^2z^3-3z^3$　…④

解答

(1)　$y=f(t)$ とおく。

$f(-t)=-f(t)$ より， $f(t)$ は奇関数だから，グラフは原点に関して対称である。増減表は $t>0$ でつくる。

$f(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{3}{t^3}$ より， $f'(t)=-\dfrac{1}{t^2}+\dfrac{9}{t^4}=-\dfrac{(t+3)(t-3)}{t^4}$

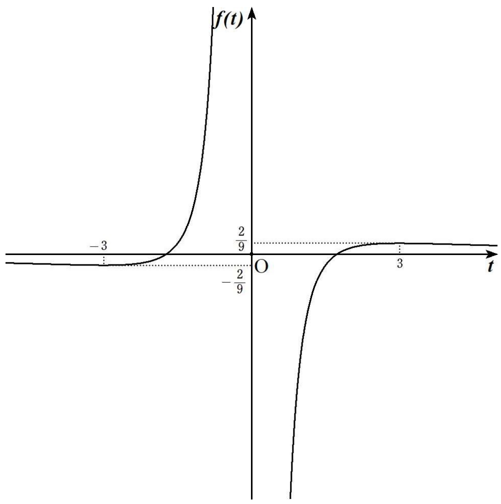
$f'(t)=0$ とおくと， $t=3$

$\displaystyle\lim_{t\to\infty}f(t)=0$ より， $f(t)=0$ は漸近線

$\displaystyle\lim_{t\to+0}f(t)=-\infty$ より， $t=0$ は漸近線

したがって， $t>0$ における増減表は,

t	0	…	3	…	∞
$f'(t)$		+	0	−	
y	$-\infty$	↗	$\dfrac{2}{9}$(極大値)	↘	0



よって，グラフの概形は， $t<0$ の部分と合わせて，右図となる。

(2)　③より， $x^3(y^2-3)=y^3(x^2-3)$　…③′

同様に④より， $y^3(z^2-3)=z^3(y^2-3)$　…④′

③′で， $x^2-3=0$ とおくと， $x=\pm\sqrt{3}$

$x=\sqrt{3}$ のとき， $y=\pm\sqrt{3}$　①より，不適。

$x=-\sqrt{3}$ のとき， $y=\pm\sqrt{3}$　①より，$(x,\ y)=(-\sqrt{3},\ \sqrt{3})$

$y=\sqrt{3}$ のとき，④′より， $z=\pm\sqrt{3}$　①より，不適。

したがって， $x^2-3\fallingdotseq 0$ より，③′から， $\dfrac{y^2-3}{y^3}=\dfrac{x^2-3}{x^3}$　…⑤

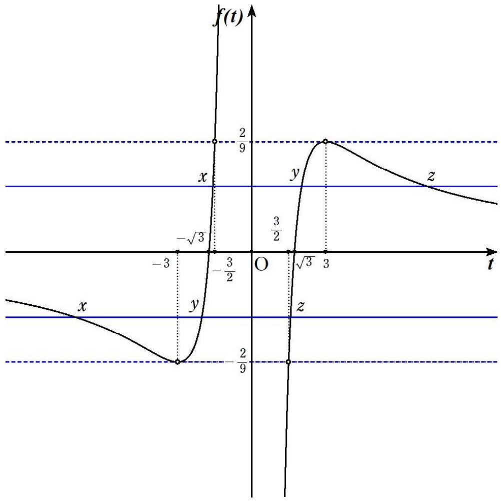
同様に，④′より， $\dfrac{z^2-3}{z^3}=\dfrac{y^2-3}{y^3}$　…⑥

⑤，⑥より， $\dfrac{x^2-3}{x^3}=\dfrac{y^2-3}{y^3}=\dfrac{z^2-3}{z^3}$

(1) の関数 $f(t)$ を用いると， $f(x)=f(y)=f(z)$ である。

①より， $x<y<z$ であるから， $f(t)=a$ となる t の値が 3 個となる場合を考える。

右図（縦軸のスケールは横軸の 20 倍である。）により，



[1]　$0<a<\dfrac{2}{9}$ のとき，$-\sqrt{3}<x<-\dfrac{3}{2}$，$\sqrt{3}<y<3$，$3<z$ である。

[2]　$-\dfrac{2}{9}<a<0$ のとき，$x<-3$，$-3<y<-\sqrt{3}$，$\dfrac{3}{2}<z<\sqrt{3}$ である。

よって，求める x のとり得る値の範囲は，$x<-3$，$-\sqrt{3}<x<-\dfrac{3}{2}$　答

別解

$x<y<z$　…①　$xyz\neq 0$　…②　$x^3y^2-3x^3=x^2y^3-3y^3$　…③　$y^3z^2-3y^3=y^2z^3-3z^3$　…④

③より，$x^2y^2(x-y)=3(x-y)(x^2+xy+y^2)$

①より，$x-y<0$ であるから，$x^2y^2=3(x^2+xy+y^2)$　$\therefore (x^2-3)y^2-3xy-3x^2=0$　…③′

同様に，④から，$(y^2-3)z^2-3yz-3y^2=0$　…④′

$x^2-3=0$ とおくと，$x=\pm\sqrt{3}$

　$x=\sqrt{3}$ のとき，③′より，$y=-\sqrt{3}$　これは，①に反する。$\therefore x\neq\sqrt{3}$

　$x=-\sqrt{3}$ のとき，③′より，$y=\sqrt{3}$　このとき④′より，$z=-\sqrt{3}$　これは，①に反する。$\therefore x\neq-\sqrt{3}$

したがって，$x^2-3\neq 0$ であるから，③′は y について 2 次方程式である。$\therefore y=\dfrac{3x\pm x\sqrt{3(4x^2-9)}}{2(x^2-3)}$

③′の判別式を D とおくと，実数解をもつから，$D\geqq 0$ である。

$D=(-3x)^2-4(x^2-3)(-3x^2)=3x^2(4x^2-9)\geqq 0$　$\therefore x=0$，$x\leqq-\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{3}{2}\leqq x$

　②より，$x\neq 0$ である。

　$x=-\dfrac{3}{2}$ のとき，③′より，$y=3$　このとき，④′より，$z=3,\ -\dfrac{3}{2}$　どちらも①に反する。$\therefore x\neq-\dfrac{3}{2}$

　$x=\dfrac{3}{2}$ のとき，③′より，$y=-3$　これは①に反する。$\therefore x\neq\dfrac{3}{2}$

したがって，③′が実数解をもつ条件は，$x<-\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{3}{2}<x$ である。

[1]　$x<-\dfrac{3}{2}$ のとき，

①′より，$y-x>0$ である。

$y-x=\dfrac{3x\pm x\sqrt{3(4x^2-9)}}{2(x^2-3)}-x=-\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{2x^2-9\mp\sqrt{3(4x^2-9)}}{x^2-3}$

(a)　$-\sqrt{3}<x<-\dfrac{3}{2}$ のとき，$-\dfrac{x}{2}>0$

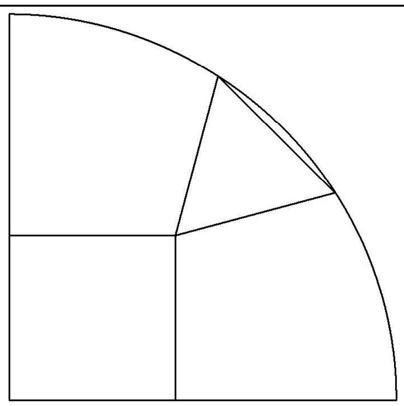
$\dfrac{9}{4}<x^2<3$ であるから，$x^2-3<0$，

$-\dfrac{9}{2}<2x^2-9<-3$，$0<\sqrt{3(4x^2-9)}<3$ より，$-\dfrac{9}{2}<2x^2-9+\sqrt{3(4x^2-9)}<0$

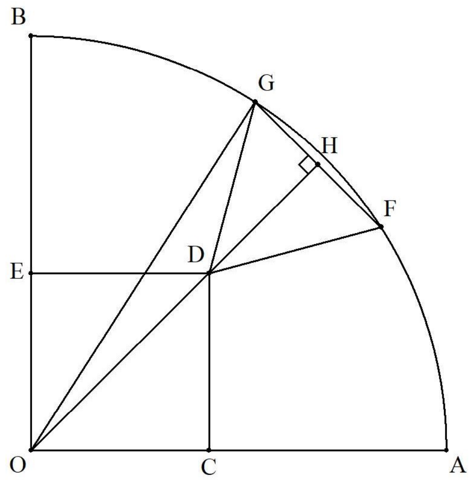
$2x^2-9-\sqrt{3(4x^2-9)}<2x^2-9+\sqrt{3(4x^2-9)}$ であるから，$2x^2-9\pm\sqrt{3(4x^2-9)}<0$

したがって，$y-x=-\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{2x^2-9\mp\sqrt{3(4x^2-9)}}{x^2-3}=$ 正$\cdot\dfrac{負}{負}>0$　$\therefore -\sqrt{3}<x<-\dfrac{3}{2}$ は適する。

追加問題１
半径１の四分円内に，図のように辺の長さが等しい正方形と正三角形が配置されている。１辺の長さを求めよ。



解答　１辺の長さを a とおき，図のように記号を付ける。



△GOH について，GO＝１，$\mathrm{OH}=\sqrt{2}a+\dfrac{\sqrt{3}a}{2}=\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}a$，

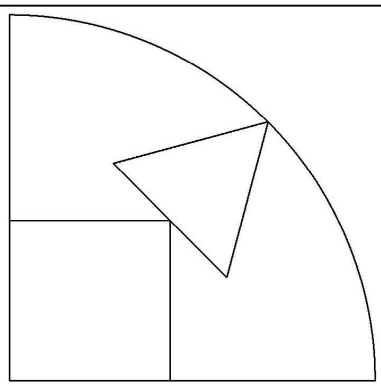
$\mathrm{HG}=\dfrac{a}{2}$ であるから，三平方の定理を適用すると，

$$\left(\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}a\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=1^2 \qquad a^2=\frac{1}{3+\sqrt{6}}=\frac{3-\sqrt{6}}{3}$$

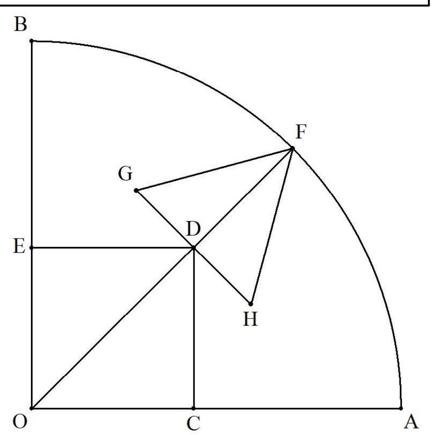
$a>0$ より，$a=\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{6}}{3}}=\dfrac{\sqrt{3(3-\sqrt{6})}}{3}$　（≒ 0.428373）

よって，求める１辺の長さは，$\dfrac{\sqrt{3(3-\sqrt{6})}}{3}$　答

追加問題２
半径１の四分円内に，図のように辺の長さが等しい正方形と正三角形が配置されている。１辺の長さを求めよ。
ただし，正三角形は四分円の中心角の二等分線に関して対称である。



解答　１辺の長さを a とおき，図のように記号を付ける。



$\mathrm{OF}=\sqrt{2}a+\dfrac{\sqrt{3}a}{2}=1$ より，

$a=\dfrac{2}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\dfrac{2(2\sqrt{2}-\sqrt{3})}{5}$　（≒ 0.438551）

よって，求める１辺の長さは，$\dfrac{2(2\sqrt{2}-\sqrt{3})}{5}$　答