

問題(1) $f(t) = -f(-t)$ なので、 $f(t)$ は奇関数です。 $t > 0$ の場合で増減を調べて、それを $t < 0$ に反映させます。すると、

$$f(t)' = \frac{9 - t^2}{t^4}$$

なので、

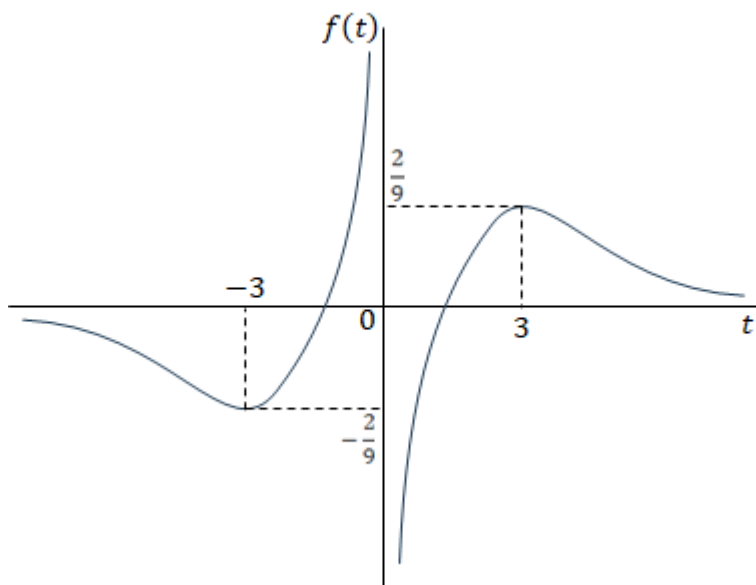
$$f(t)' = 0 \Rightarrow t = 3 \text{ です。}$$

また、

$$\lim_{t \rightarrow +0} f(t) = -\infty, \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$$

です。以上より、増減表とグラフは次のようになります。

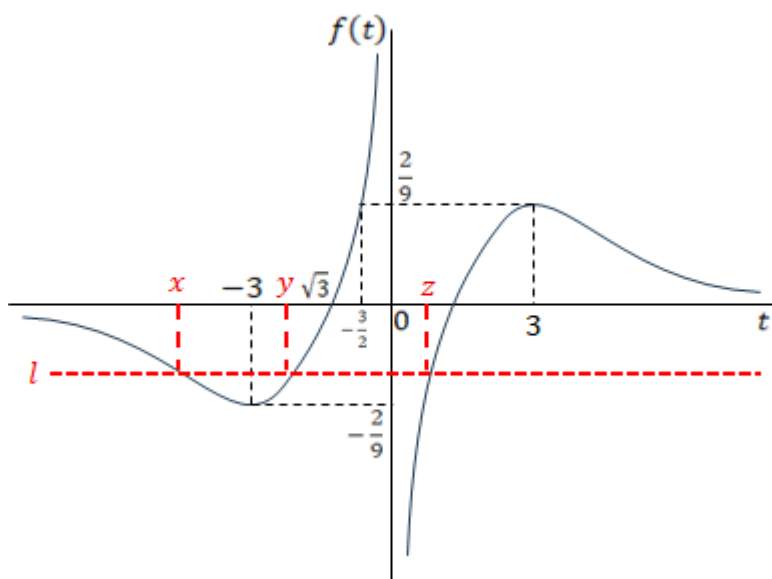
t	...	-3	...	0	...	3	...
f(t)'	-	0	+	/	+	0	-
f(t)	↘	$-\frac{2}{9}$	↗	/	↗	$\frac{2}{9}$	↘



問題(2) 前問(1)の結果を利用するため、③式を変形して、 $f(x)$ 、 $f(y)$ の関係式を導きます。 $xyz \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ かつ $y \neq 0$ なので、

$$x^3y^2 - 3x^3 = x^2y^3 - 3y^3 \Rightarrow x^3(y^2 - 3) = y^3(x^2 - 3) \Rightarrow \frac{x^2 - 3}{x^3} = \frac{y^2 - 3}{y^3} \Rightarrow f(x) = f(y)$$

です。④式も同様にやって、 $f(y) = f(z)$ となります。つまり、 $f(x) = f(y) = f(z)$ です。この条件は、下図で示したように、 t 軸に平行な直線 l が $f(t)$ と3つの異なる点で交わることを意味します。そして、その3つの交点の t 座標が、小さい方から x, y, z となります。



このとき、 x の取り得る範囲は、

$$x < -3 \text{ または } -\sqrt{3} < x < -\frac{3}{2}$$

となります。

別解 この手の問題は前問の結果を利用すると、スムーズに解けるように作られていることが多いです。しかし、この問題が単独で出題されたとしたら、前問の数式が頭に浮かぶ受験生は少ないのではないのでしょうか。前問がないとして、取り組んでみました。かなり泥臭いアプローチですが、次のようにやりました。

③式を変形すると、

$$x^3y^2 - 3x^3 = x^2y^3 - 3y^3 \Rightarrow (x-y)(x^2y^2 - 3x^2 - 3xy - 3y^2) = 0$$

$$\Rightarrow x^2y^2 - 3x^2 - 3xy - 3y^2 = 0$$

となりますが、 $xyz \neq 0$ なので、上式を $3x^2y^2$ で割ると、

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{y^2} - \frac{1}{xy} - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{3}$$

です。④式も同様にやって、

$$\frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{yz} = \frac{1}{3}$$

です。上式を扱い易くするために、

$$\frac{1}{x} = u, \frac{1}{y} = v, \frac{1}{z} = w$$

で書き換えると、

$$u^2 + v^2 + uv = \frac{1}{3}$$

$$v^2 + w^2 + vw = \frac{1}{3}$$

となります。この2つの式から、シンプルな数式

$$u + v + w = 0$$

が導かれます。理由は次の通りです。 u と w は、実数 t に関する次の二次方程式の解です。

$$t^2 + tv + v^2 = \frac{1}{3}$$

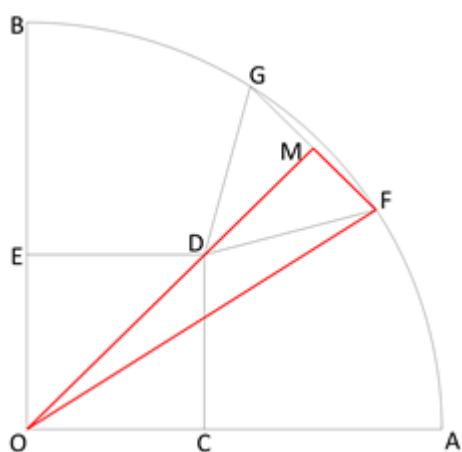
ここで、解と係数の関係より、

$$u + w = -\frac{v}{1} \Rightarrow u + v + w = 0$$

となります。

これ以降は地道に調べ上げれば、解答に辿り着きます。その過程は野暮で単調なので、参考までに補足1に記載しておきます。

追加問題1



図のように、各点に記号を付けます。ただし、**M**は**FG**の中点とします。正方形と正三角形の一辺の長さを**a**とし、 $\triangle OFM$ に三平方の定理を適用すると、

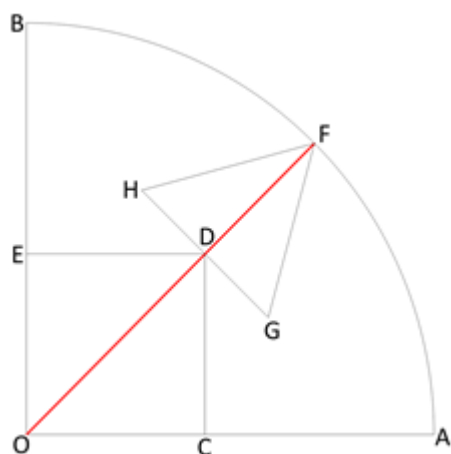
$$OM^2 + FM^2 = OF^2$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{2}OC + \frac{\sqrt{3}}{2}DF \right)^2 + \left(\frac{FG}{2} \right)^2 = OF^2$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}a \right)^2 + \left(\frac{a}{2} \right)^2 = 1^2 \Rightarrow a = \pm \frac{\sqrt{3} - \sqrt{6}}{\sqrt{3}}$$

です。ここで、 $a > 0$ なので、一辺の長さは $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{6}}{\sqrt{3}} = 0.42837 \dots$ です。

追加問題2



図のように、各点に記号を付けます。正方形と正三角形の一辺の長さを**a**とすると、

$$OD + DF = OF \Rightarrow \sqrt{2}OC + \frac{\sqrt{3}}{2}FG = OF$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}a = 1 \Rightarrow a = \frac{4\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{5}$$

です。よって、一辺の長さは $\frac{4\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{5} = 0.43855 \dots$ です。

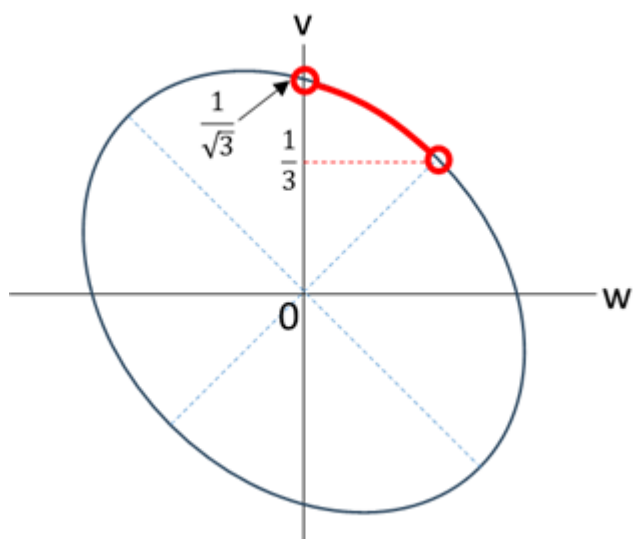
補足1 $u + v + w = 0$ の x の値域

u, v, w がすべて正なら、 $u + v + w > 0$ なので、不都合です。 u, v, w がすべて負の場合も同様です。
なので、考えられるのは、次の2つのケースとなります。

ケースA… $u < 0$ かつ $0 < w < v$

ケースB… $v < u < 0$ かつ $0 < w$

ケースA

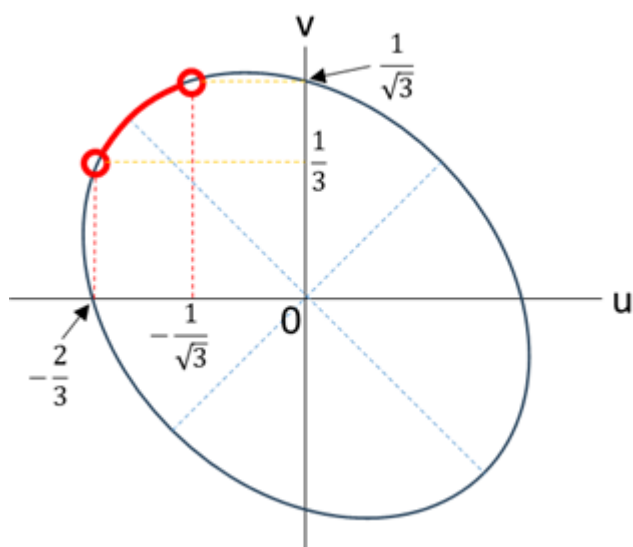


グラフの外観は補足2に記載しました。

条件 $0 < w < v$ は左図の赤で示した領域ですから、 v の取り得る範囲は、

$$\frac{1}{3} < v < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

です。



上の条件下で、 $u < 0$ は左図の赤で示した領域ですから、

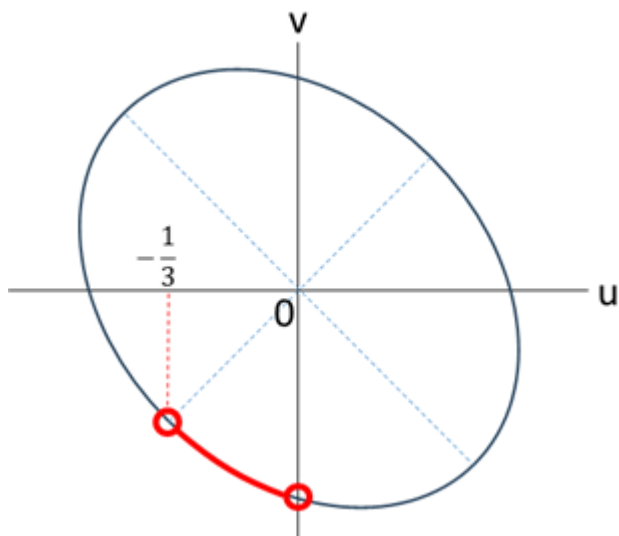
$$-\frac{2}{3} < u < -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

です。これを x の範囲に戻すと、

$$-\sqrt{3} < x < -\frac{3}{2}$$

となります。

ケース B



グラフの外観は補足2に記載しました。

条件 $v < u < 0$ は左図の赤で示した領域ですから、 u の取り得る範囲は、

$$-\frac{1}{3} < v < 0$$

です。これを x の範囲に戻すと、

$$x < -3$$

となります。

以上より、 x の取り得る範囲は、

$$x < -3 \text{ または } -\sqrt{3} < x < -\frac{3}{2}$$

です。

補足2 $u^2 + v^2 + uv = \frac{1}{3}, v^2 + w^2 + vw = \frac{1}{3}$

どちらの二次式も変数が異なるだけで、同じ形をしているので、 $u^2 + v^2 + uv = \frac{1}{3}$ で考えます。この式は行列とベクトルで表現すると、

$$u^2 + v^2 + uv = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{u^2}{3} + \frac{vu}{3} + \frac{v^2}{3} = 1 \Rightarrow (u, v) \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

ですが、

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

とおくと、その固有値 λ は、次の特性方程式

$$\det|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \det \left| \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

を解いて、 $\lambda = \frac{2\sqrt{3} \pm 1}{6}$ となるので、適当な行列

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

を用いて、

$$u^2 + v^2 + uv = (u, v) \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{3}-1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{2\sqrt{3}+1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

と表すことができます。

すると、

$$(U, V) \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{3}-1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{2\sqrt{3}+1}{6} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \frac{2\sqrt{3}-1}{6} U^2 + \frac{2\sqrt{3}+1}{6} V^2 = 1$$

ですから、上式は楕円を表しています。そして、

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos \frac{\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \frac{\pi}{4}$$

なので、その楕円は $\frac{\pi}{4}$ 傾いた座標系にいたことがわかります。

