

● 問題 458 解答<三角定規>

[問題]

$$(1) f(t) = \frac{t^2 - 3}{t^3}$$

$$f'(t) = \frac{2t \cdot t^3 - (t^2 - 3) \cdot 3t^2}{t^6} = \frac{9 - t^2}{t^4}$$

$f'(t) = 0$ とする t は, $t = \pm 3$ 。

$f'(t)$ の符号, $f(t)$ の増減は右表のようになる。

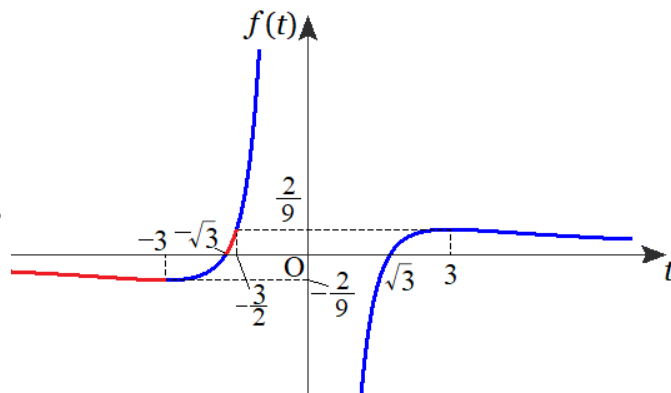
t	$-\infty$	$\dots$	-3	$\dots$	0	$\dots$	3	$\dots$	∞
f'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	極小 $-2/9$	$\nearrow$	∞ $-\infty$	$\nearrow$	極大 $2/9$	$\searrow$	0

よって, $f(t)$ は $t = -3$ で極小値 $-\frac{2}{9}$,

$t = 3$ で極大値 $\frac{2}{9}$ をとり,

さらに, $\lim_{t \rightarrow \pm \infty} f(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow -0} f(t) = \infty$, $\lim_{t \rightarrow +0} f(t) = -\infty$

であるから, $f(t)$ のグラフは右図のようになる。



$$(2) x < y < z \cdots \textcircled{1}, \quad xyz \neq 0 \cdots \textcircled{2}$$

$$x^3 y^2 - 3x^3 = x^2 y^3 - 3y^3 \cdots \textcircled{3}$$

$$y^3 z^2 - 3y^3 = y^2 z^3 - 3z^3 \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{2}\textcircled{3}\textcircled{4} \text{より}, \quad \frac{x^2 - 3}{x^3} = \frac{y^2 - 3}{y^3} = \frac{z^2 - 3}{z^3} = k \cdots \textcircled{5}$$

⑤を満たす x, y, z は, ①の $f(t) = \frac{t^2 - 3}{t^3}$ と直線 $f(t) = k$ の3つの交点の t 座標で与えられるから,

そのようなことが起こる k の条件は $-\frac{2}{9} < k < \frac{2}{9}$, $k \neq 0$ で,

$$k = \frac{2}{9} \text{ のとき}, \quad \frac{t^2 - 3}{t^3} = \frac{2}{9} \quad \therefore 2t^3 - 9t^2 + 27 = (t - 3)^2(2t + 3) = 0$$

以上より, 交点の t 座標の内, 最も小さいものの値 x の範囲は, $x < -3$, $-\sqrt{3} < x < -\frac{3}{2}$ …[答]

《追加問題》

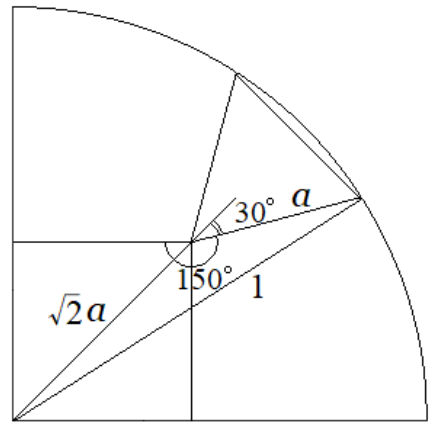
[問題 1] 求める長さを a とすると, 右図のようになるから

$$(\sqrt{2}a)^2 + a^2 - 2\sqrt{2}a \cdot a \cdot \cos 150^\circ = 1^2$$

$$\therefore 3a^2 + 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 = (3 + \sqrt{6})a^2 = 1$$

$$\therefore a^2 = \frac{1}{3 + \sqrt{6}} = \frac{3 - \sqrt{6}}{3}$$

$$\therefore a = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{6}}{3}} = \frac{\sqrt{9 - 3\sqrt{6}}}{3} \quad (=0.428\cdots) \cdots [\text{答}]$$



[問題 2] 求める長さを a とすると, 右図のようになるから

$$\sqrt{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}a = \left(\sqrt{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a = 1$$

$$\therefore a = \frac{2}{2\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{2(2\sqrt{2} - \sqrt{3})}{5} \quad (=0.438\cdots) \cdots [\text{答}]$$

