

## 一般項が単項式×2の累乗である数列の和

次の一般項が単項式×2の累乗である数列の和を  $n$  で表せ。（ただし (IV), (V) は余力問題）

$$(I) \sum_{k=1}^n k \cdot 2^k \quad (II) \sum_{k=1}^n k^2 \cdot 2^k \quad (III) \sum_{k=1}^n k^3 \cdot 2^k \quad (IV) \sum_{k=1}^n k^4 \cdot 2^k \quad (V) \sum_{k=1}^n k^5 \cdot 2^k$$

コンピュータにできることはコンピュータに命令する。

[Julia](#) の [SymPy](#) に、数列の一般項  $a_k$  を与えて  $\sum_{k=1}^n a_k$  を求める `summation()` という関数がある。

今回の場合だと、 $\sum_{k=1}^n k^3 \cdot 2^k$  は、`summation(k3 * 2k, (k, 1, n))` により  
 $2 * (2^n * n^3 - 3 * 2^n * n^2 + 9 * 2^n * n - 13 * 2^n + 13)$  が得られる。

```
using SymPy
@syms k, n
s = summation(k^3*2^k, (k, 1, n))
@show(s)
```

```
s = 2*(2^n*n^3 - 3*2^n*n^2 + 9*2^n*n - 13*2^n + 13)
```

$$2(2^n n^3 - 3 \cdot 2^n n^2 + 9 \cdot 2^n n - 13 \cdot 2^n + 13)$$

$n = 100$  のときの値は `s(100)` で求まる。

```
s(200)
```

25331086774091868373786109547814749930891333535516594785943052877850

ブルートフォースでチェックすると以下ようになる。  $k$  を `big(k)`,  $2$  を `big(2)` としたのは、長精度計算を行うためである。

```
s0 = big(0)
for k = 1:200
    s0 += big(k)^3*big(2)^k
end
println(s0)
```

25331086774091868373786109547814749930891333535516594785943052877850

系統的に行うために以下のような関数を書く。引数  $a$  は  $k^a$ ,  $lim$  は  $k = 1$  から  $lim$  項までの和を求めることを表す。

```
function check(a,lim)
    # 一般項を求める
    @syms k, n
    s00 = summation(k^a*2^k, (k, 1, n))
    println("k^$a*2^k のときの一般項")
    s00 |> display
    println("n = 1:$lim までの和")
    println("ブルートフォースの結果\n", sum([big(k)^a*big(2)^k for k = 1:lim]))
    println("公式を使った結果\n", s00(lim))
end;
```

```
# k^1
check(1, 142)
```

$k^1 \cdot 2^k$  のときの一般項

$$2(2^n n - 2^n + 1)$$

```
n = 1:142 までの和
ブルートフォースの結果
1572202536496408931478268138221709486171619330
公式を使った結果
1572202536496408931478268138221709486171619330
```

```
# k^2
check(2, 151)
```

$k^2 \cdot 2^k$  のときの一般項

$$2(2^n n^2 - 2 \cdot 2^n n + 3 \cdot 2^n - 3)$$

```
n = 1:151 までの和
ブルートフォースの結果
128463710325078036974294203538210158235538258132986
公式を使った結果
128463710325078036974294203538210158235538258132986
```

```
# k^3
check(3, 125)
```

$k^3 \cdot 2^k$  のときの一般項

$$2(2^n n^3 - 3 \cdot 2^n n^2 + 9 \cdot 2^n n - 13 \cdot 2^n + 13)$$

n = 1:125 までの和  
ブルートフォースの結果  
162260413983763757387107279495068069834784794  
公式を使った結果  
162260413983763757387107279495068069834784794

#  $k^4$   
check(4, 133)

$k^4 \cdot 2^k$  のときの一般項

$$2(2^n n^4 - 4 \cdot 2^n n^3 + 18 \cdot 2^n n^2 - 52 \cdot 2^n n + 75 \cdot 2^n - 75)$$

n = 1:133 までの和  
ブルートフォースの結果  
6616215879693142150878006478677790036890333740906  
公式を使った結果  
6616215879693142150878006478677790036890333740906

#  $k^5$   
check(5, 141)

$k^5 \cdot 2^k$  のときの一般項

$$2(2^n n^5 - 5 \cdot 2^n n^4 + 30 \cdot 2^n n^3 - 130 \cdot 2^n n^2 + 375 \cdot 2^n n - 541 \cdot 2^n + 541)$$

n = 1:141 までの和  
ブルートフォースの結果  
300146456241054087985957741319114916074229187550905402  
公式を使った結果  
300146456241054087985957741319114916074229187550905402

#  $k^6$   
check(6, 135)

$k^6 \cdot 2^k$  のときの一般項

$$2(2^n n^6 - 6 \cdot 2^n n^5 + 45 \cdot 2^n n^4 - 260 \cdot 2^n n^3 + 1125 \cdot 2^n n^2 - 3246 \cdot 2^n n + 4683 \cdot 2^n - 4683)$$

n = 1:135 までの和  
ブルートフォースの結果  
505140650593058446644280079898189774510750802932390762  
公式を使った結果  
505140650593058446644280079898189774510750802932390762

# k<sup>7</sup>  
check(7, 131)

k<sup>7</sup>\*2<sup>k</sup> のときの一般項

$$2(2^n n^7 - 7 \cdot 2^n n^6 + 63 \cdot 2^n n^5 - 455 \cdot 2^n n^4 + 2625 \cdot 2^n n^3 - 11361 \cdot 2^n n^2 + 32781 \cdot 2^n n - 47293 \cdot 2^n + 47293)$$

n = 1:131 までの和  
ブルートフォースの結果  
3424533416319119314473342742259301626244160352791130490  
公式を使った結果  
3424533416319119314473342742259301626244160352791130490

# k<sup>8</sup>  
check(8, 146)

k<sup>8</sup>\*2<sup>k</sup> のときの一般項

$$2(2^n n^8 - 8 \cdot 2^n n^7 + 84 \cdot 2^n n^6 - 728 \cdot 2^n n^5 + 5250 \cdot 2^n n^4 - 30296 \cdot 2^n n^3 + 131124 \cdot 2^n n^2 - 378344 \cdot 2^n n + 545835 \cdot 2^n - 545835)$$

n = 1:146 までの和  
ブルートフォースの結果  
34951301393122765462842464159550209589191439533329498948720554  
公式を使った結果  
34951301393122765462842464159550209589191439533329498948720554

# k<sup>9</sup>  
check(9, 155)

k<sup>9</sup>\*2<sup>k</sup> のときの一般項

$$2(2^n n^9 - 9 \cdot 2^n n^8 + 108 \cdot 2^n n^7 - 1092 \cdot 2^n n^6 + 9450 \cdot 2^n n^5 - 68166 \cdot 2^n n^4 + 393372 \cdot 2^n n^3 - 1702548 \cdot 2^n n^2 + 4912515 \cdot 2^n n - 7087261 \cdot 2^n + 7087261)$$

n = 1:155 までの和  
ブルートフォースの結果  
4462991583930264564068283331768646602505065889386735292806770215226  
公式を使った結果  
4462991583930264564068283331768646602505065889386735292806770215226

# k<sup>10</sup>  
check(10, 124)

$k^{10} \cdot 2^k$  のときの一般項

$$2 \left( 2^n n^{10} - 10 \cdot 2^n n^9 + 135 \cdot 2^n n^8 - 1560 \cdot 2^n n^7 + 15750 \cdot 2^n n^6 - 136332 \cdot 2^n n^5 + 983430 \cdot 2^n n^4 - 5675160 \cdot 2^n n^3 + 24562575 \cdot 2^n n^2 - 70872610 \cdot 2^n n + 102247563 \cdot 2^n - 102247563 \right)$$

n = 1:124 までの和

ブルートフォースの結果

33901855205261951816525711537345562816656077485019849795306

公式を使った結果

33901855205261951816525711537345562816656077485019849795306

#  $k^{20}$

check(20, 93)

$k^{20} \cdot 2^k$  のときの一般項

$$2 \left( 2^n n^{20} - 20 \cdot 2^n n^{19} + 570 \cdot 2^n n^{18} - 14820 \cdot 2^n n^{17} + 363375 \cdot 2^n n^{16} - 8387664 \cdot 2^n n^{15} + 181513080 \cdot 2^n n^{14} - 3666153360 \cdot 2^n n^{13} + 68758834950 \cdot 2^n n^{12} - 1190376357560 \cdot 2^n n^{11} + 18890850749628 \cdot 2^n n^{10} - 272537366961080 \cdot 2^n n^9 + 3538694769942150 \cdot 2^n n^8 - 40842059166495120 \cdot 2^n n^7 + 412458453534370680 \cdot 2^n n^6 - 3570310592920632912 \cdot 2^n n^5 + 25754346934199664975 \cdot 2^n n^4 - 148622674413214927140 \cdot 2^n n^3 + 643251586018800611370 \cdot 2^n n^2 - 1856031746386568222660 \cdot 2^n n + 2677687796244384203115 \cdot 2^n - 2677687796244384203115 \right)$$

n = 1:93 までの和

ブルートフォースの結果

38801126017310784968877414992845463845455962711964612275412468989226

公式を使った結果

38801126017310784968877414992845463845455962711964612275412468989226