４５９．

次の一般項が単項式×２の累乗である数列の和をｎで表せ。(ただし，(Ⅳ)，(Ⅴ)は余力問題)

(Ⅰ) $\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^k$　(Ⅱ) $\sum_{k=1}^{n} k^2\cdot 2^k$　(Ⅲ) $\sum_{k=1}^{n} k^3\cdot 2^k$　(Ⅳ) $\sum_{k=1}^{n} k^4\cdot 2^k$　(Ⅴ) $\sum_{k=1}^{n} k^5\cdot 2^k$

（Ｉ）$S_n=\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^k$（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）とする．

S_n-2S_nを計算すると，

$$
\begin{array}{rrl}
 & S_n= & 1\cdot 2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+4\cdot 2^4+\cdots+\qquad\qquad n\cdot 2^n \\
-) & 2S_n= & \qquad\quad 1\cdot 2^2+2\cdot 2^3+3\cdot 2^4+\cdots+(n-1)\cdot 2^n+n\cdot 2^{n+1} \\
\hline
 & -S_n= & 2+\quad 2^2+\quad 2^3+\quad 2^4+\cdots+\qquad\qquad 2^n-n\cdot 2^{n+1}
\end{array}
$$

$$=2\cdot\frac{2^n-1}{2-1}-n\cdot 2^{n+1}=(1-n)2^{n+1}-2$$

$\therefore S_n=(n-1)2^{n+1}+2$・・・（答）

（別解）$f(x)=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n$とすると，

$f'(x)=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+nx^{n-1}$

$\therefore xf'(x)=x+2x^2+3x^3+4x^4+\cdots+nx^n$

$\therefore S_n=2f'(2)$

次に，$x\neq 1$のとき，$f(x)=\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$

$$\therefore f'(x)=\frac{(n+1)x^n\cdot(x-1)-(x^{n+1}-1)\cdot 1}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$$

$$\therefore S_n=2f'(2)=2\cdot\frac{n\cdot 2^{n+1}-(n+1)\cdot 2^n+1}{1^2}$$

$$=n\cdot 2^{n+2}-(n+1)\cdot 2^{n+1}+2=\{(2n-(n+1)\}\cdot 2^{n+1}+2$$

$=(n-1)2^{n+1}+2$・・・（答）

（別解）$S_n=(an+b)2^n+c$（$a,\ b,\ c$は定数，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）とすると，

$$
\begin{cases}
S_1=2(a+b)+c=1\cdot 2 \\
S_2=4(2a+b)+c=1\cdot 2+2\cdot 2^2 \\
S_3=8(3a+b)+c=1\cdot 2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3
\end{cases}
$$

$$\therefore \begin{cases} 2a+2b+c=2 \cdots\cdots ① \\ 8a+4b+c=10 \cdots\cdots ② \\ 24a+8b+c=34 \cdots ③ \end{cases}$$

②－①より，$6a+2b=8$　　　$\therefore 3a+b=4 \cdots ④$

③－②より，$16a+4b=24$　　　$\therefore 4a+b=6 \cdots ⑤$

⑤－④より，$a=2$

④より，$b=4-3a=4-6=-2$

①より，$c=2-2a-2b=2-4+4=2$

$\therefore S_n=(2n-2)2^n+2=(n-1)2^{n+1}+2 \cdots ⑥$

これを数学的帰納法で証明する．

i)．$n=1$のとき，明らかに成立する．

ii)．$n=k$（$k \geqq 1$）のとき，成立すると仮定すると，$S_k=(k-1)2^{k+1}+2$

$\therefore S_{k+1}=S_k+(k+1)2^{k+1}=(k-1)2^{k+1}+2+(k+1)2^{k+1}$

$=2k \cdot 2^{k+1}+2=k \cdot 2^{k+2}+2$

故に$n=k+1$のときも，⑥は成立する．

故にすべての自然数nにおいて，⑥は成立する．

（Ⅱ）$T_n=\sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot 2^k$（$n=1, 2, 3, \cdots$）とすると，

$T_n=1^2 \cdot 2+2^2 \cdot 2^2+3^2 \cdot 2^3+4^2 \cdot 2^4+\cdots+n^2 \cdot 2^4$

T_n-2T_nを計算すると，

$$\begin{array}{rl} T_n= & 1^2 \cdot 2+2^2 \cdot 2^2+3^2 \cdot 2^3+4^2 \cdot 2^4+\cdots+ \quad n^2 \cdot 2^n \\ -)\ 2T_n= & \qquad\quad 1^2 \cdot 2^2+2^2 \cdot 2^3+3^2 \cdot 2^4+\cdots+(n-1)^2 \cdot 2^n+n^2 \cdot 2^{n+1} \\ \hline -T_n= & (2\cdot1-1)2+(2\cdot2-1)2^2+(2\cdot3-1)2^3+(2\cdot4-1)2^4+\cdots+(2n-1)2^n \\ & -n^2 \cdot 2^{n+1} \end{array}$$

$=2(1 \cdot 2+2 \cdot 2^2+3 \cdot 2^3+4 \cdot 2^4+\cdots+n \cdot 2^n)$

$-(2+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^n)-n^2 \cdot 2^{n+1}$

$=2S_n-2(2^n-1)-n^2 \cdot 2^{n+1}$

$=2\{(n-1)2^{n+1}+2\}-(n^2+1)2^{n+1}+2$

$=(-n^2+2n-3)2^{n+1}+6$

$\therefore T_n=(n^2-2n+3)2^{n+1}-6 \cdots$（答）

（別解）$T_n=(an^2+bn+c)2^n+d$（a, b, c, dは定数，

$n=1, 2, 3, \cdots$）とすると，

$$\begin{cases} T_1 = 2(a+b+c)+d = 1^2 \cdot 2 \\ T_2 = 4(4a+2b+c)+d = 1^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 2^2 \\ T_3 = 8(9a+3b+c)+d = 1^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 2^2 + 3^2 \cdot 2^3 \\ T_4 = 16(16a+4b+c)+d = 1^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 2^2 + 3^2 \cdot 2^3 + 4^2 \cdot 2^4 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} 2a+2b+2c+d = 2 \cdots\cdots\cdots ① \\ 16a+8b+4c+d = 18 \cdots\cdots ② \\ 72a+24b+8c+d = 90 \cdots\cdots ③ \\ 256a+64b+16c+d = 346 \cdots ④ \end{cases}$$

②−①より，$14a+6b+2c=16$　　$\therefore 7a+3b+c=8 \cdots$⑤

③−②より，$56a+16b+4c=72$

$\therefore 14a+4b+c=18 \cdots$⑥

④−③より，$184a+40b+8c=256$

$\therefore 23a+5b+c=32 \cdots$⑦

⑥−⑤より，$7a+b=10 \cdots$⑧

⑦−⑥より，$9a+b=14 \cdots$⑨

⑨−⑧より，$2a=4$　　$\therefore a=2$

⑧より，$b=10-7a=10-14=-4$

⑤より，$c=8-7a-3b=8-14+12=6$

①より，$d=2-2a-2b-2c=2-4+8-12=-6$

$\therefore T_n=(2n^2-4n+6)2^n-6=(n^2-2n+3)2^{n+1}-6 \cdots$⑩

これを数学的帰納法で証明する．

i)．$n=1$のとき，明らかに成立する．

ii)．$n=k$（$k \geqq 1$）のとき，⑩が成立すると仮定すると，

$T_k=(k^2-2k+3)2^{k+1}-6$

$$\begin{aligned} \therefore T_{k+1} &= T_k+(k+1)^2 \cdot 2^{k+1} \\ &= (k^2-2k+3)2^{k+1}-6+(k^2+2k+1)\cdot 2^{k+1} \\ &= (2k^2+4)2^{k+1}-6=(k^2+2)2^{k+2}-6 \\ &= \{(k+1)^2-2(k+1)+3)\}2^{(k+1)+1}-6 \end{aligned}$$

故に$n=k+1$のときも，⑩は成立する．

故にすべての自然数nにおいて，⑩は成立する．

（Ⅲ）$U_n=\sum_{k=1}^{n} k^3 \cdot 2^k$（$n=1, 2, 3, \cdots$）とすると，

$U_n=1^3 \cdot 2+2^3 \cdot 2^2+3^3 \cdot 2^3+4^3 \cdot 2^4+\cdots+n^3 \cdot 2^4$

U_n-2U_nを計算すると，

$$
\begin{array}{rl}
U_n= & 1^3\cdot 2+2^3\cdot 2^2+3^3\cdot 2^3+4^3\cdot 2^4+\cdots+n^3\cdot 2^n \\
-)\ 2U_n= & \qquad\quad 1^3\cdot 2^2+2^3\cdot 2^3+3^3\cdot 2^4+\cdots+(n-1)^3\cdot 2^n+n^3\cdot 2^{n+1} \\ \hline
-U_n= & (3\cdot 1^2-3\cdot 1+1)2+(3\cdot 2^2-3\cdot 2+1)2^2+(3\cdot 3^2-3\cdot 3+1)2^3+(3\cdot 4^2-3\cdot 4+1)2^4
\end{array}
$$

$$+\cdots+(3n^2-3n+1)2^n-n^3\cdot 2^{n+1}$$

$$=3(1^2\cdot 2+2^2\cdot 2^2+3^2\cdot 2^3+4^2\cdot 2^4+\cdots+n^2\cdot 2^n)$$

$$-3(1\cdot 2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+4\cdot 2^4+\cdots+n\cdot 2^n)$$

$$+(2+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^n)-n^3\cdot 2^{n+1}$$

$$=3T_n-3S_n+2(2^n-1)-n^3\cdot 2^{n+1}$$

$$=3\{(n^2-2n+3)2^{n+1}-6\}-3\{(n-1)2^{n+1}+2\}+2(2^n-1)$$

$$-n^3\cdot 2^{n+1}$$

$$=\{3(n^2-2n+3)-3(n-1)+1-n^3\}2^{n+1}-26$$

$$=(-n^3+3n^2-9n+13)2^{n+1}-26$$

$\therefore U_n=(n^3-3n^2+9n-13)2^{n+1}+26\cdots$（答）

（別解）$U_n=(an^3+bn^2+cn+d)2^n+e$（a，b，c，d，eは定数，$n=1,2,3,\cdots$）とすると，

$$
\begin{cases}
U_1=2(a+b+c+d)+e=1^3\cdot 2 \\
U_2=4(8a+4b+2c+d)+e=1^3\cdot 2+2^3\cdot 2^2 \\
U_3=8(27a+9b+3c+d)+e=1^3\cdot 2+2^3\cdot 2^2+3^3\cdot 2^3 \\
U_4=16(64a+16b+4c+d)+e=1^3\cdot 2+2^3\cdot 2^2+3^3\cdot 2^3+4^3\cdot 2^4 \\
U_5=32(125a+25b+5c+d)+e=1^3\cdot 2+2^3\cdot 2^2+3^3\cdot 2^3+4^3\cdot 2^4+5^3\cdot 2^5
\end{cases}
$$

$$
\therefore\begin{cases}
2a+2b+2c+2d+e=2\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①} \\
32a+16b+8c+4d+e=34\cdots\cdots\cdots\text{②} \\
216a+72b+24c+8d+e=250\cdots\cdots\text{③} \\
1024a+256b+64c+16d+e=1274\cdots\text{④} \\
4000a+800b+160c+32d+e=5274\cdots\text{⑤}
\end{cases}
$$

②−①より，$30a+14b+6c+2d=32$

$\therefore 15a+7b+3c+d=16\cdots$⑥

③−②より，$184a+56b+16c+4d=216$

$\therefore 46a+14b+4c+d=54\cdots$⑦

④−③より，$808a+184b+40c+8d=1024$

$\therefore 101a+23b+5c+d=128\cdots$⑧

⑤−④より，$2976a+544b+96c+16d=4000$

$\therefore 186a+34b+6c+d=250\cdots$⑨

⑦−⑥より，$31a+7b+c=38\cdots$⑩

⑧−⑦より，$55a+9b+c=74\cdots$⑪

⑨−⑧より，$85a+11b+c=122$・・・⑫

⑪−⑩より，$24a+2b=36$　　$\therefore 12a+b=18$・・・⑬

⑫−⑪より，$30a+2b=48$　　$\therefore 15a+b=24$・・・⑭

⑭−⑬より，$3a=6$　　$\therefore a=2$

⑬より，$b=18-12a=18-24=-6$

⑩より，$c=38-31a-7b=38-62+42=18$

⑥より，$d=16-15a-7b-3c=16-30+42-54=-26$

①より，$e=2-2a-2b-2c-2d=2-4+12-36+52=26$

$\therefore T_n=(2n^3-6n^2+18n-26)2^n+26$

$=(n^3-3n^2+9n-13)2^{n+1}+26$・・・⑮

これを数学的帰納法で証明する．

i)．$n=1$のとき，明らかに成立する．

ii)．$n=k$（$k\geqq 1$）のとき，⑮が成立すると仮定すると，

$T_k=(k^3-3k^2+9k-13)2^{k+1}+26$

$\therefore T_{k+1}=T_k+(k+1)^3\cdot 2^{k+1}$

$=(k^3-3k^2+9k-13)2^{k+1}+26$

$+(k^3+3k^2+3k+1)\cdot 2^{k+1}$

$=(2k^3+12k-12)2^{k+1}+26=(k^3+6k-6)2^{k+2}+26$

$=\{(k+1)^3-3(k+1)^2+9(k+1)-13\}2^{(k+1)+1}+26$

故に$n=k+1$のときも，⑮は成立する．

故にすべての自然数nにおいて，⑮は成立する．

(Ⅳ) $V_n=\sum_{k=1}^{n} k^4\cdot 2^k$（$n=1$，$2$，$3$，・・・）とすると，

$V_n=1^4\cdot 2+2^4\cdot 2^2+3^4\cdot 2^3+4^4\cdot 2^4+\cdots+n^4\cdot 2^n$

V_n-2V_nを計算すると，同様に，

$-V_n=4U_n-6T_n+4S_n-2(2^n-1)-n^4\cdot 2^{n+1}$

$\therefore V_n=-[4\{(n^3-3n^2+9n-13)2^{n+1}+26\}$

$-6\{(n^2-2n+3)2^{n+1}-6\}+4\{(n-1)2^{n+1}+2\}$

$-2(2^n-1)-n^4\cdot 2^{n+1}]$

$=-[\{-n^4+4(n^3-3n^2+9n-13)-6(n^2-2n+3)$

$+4(n-1)-1\}2^{n+1}+104+36+8+2]$

$=-\{(-n^4+4n^3-12n^2+36n-52-6n^2+12n-18$

$+4n-4-1)2^{n+1}+150\}$

$=(n^4-4n^3+18n^2-52n+75)2^{n+1}-150$・・・（答）

（Ⅴ）$W_n=\sum_{k=1}^{n} k^5\cdot 2^k$（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）とすると，

$$W_n=1^5\cdot 2+2^5\cdot 2^2+3^5\cdot 2^3+4^5\cdot 2^4+\cdots+n^5\cdot 2^n$$

W_n-2W_nを計算すると，同様に，

$$-W_n=5V-10U_n+10T_n-5S_n+2(2^n-1)-n^5\cdot 2^{n+1}$$

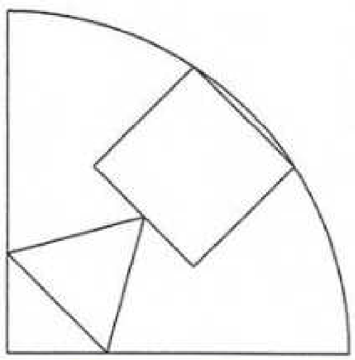
$$\begin{aligned}
\therefore W_n=&-[5\{(n^4-4n^3+18n^2-52n+75)2^{n+1}-150\}\\
&-10\{(n^3-3n^2+9n-13)2^{n+1}+26\}\\
&+10\{(n^2-2n+3)2^{n+1}-6\}-5\{(n-1)2^{n+1}+2\}\\
&+2(2^n-1)-n^5\cdot 2^{n+1}]\\
=&-\{(5n^4-20n^3+90n^2-260n+375\\
&-10n^3+30n^2-90n+130+10n^2-20n+30\\
&-5n+5+1-n^5)2^{n+1}-750-260-60-10-2\}\\
=&(n^5-5n^4+30n^3-130n^2+375n-541)2^{n+1}+1082
\end{aligned}$$

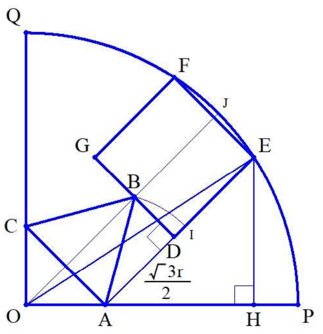
・・・（答）

問題１　　シリーズ5問目

正方形と正三角形の1辺が等しいとき（辺を共有しない），

半径１の四分円内に，図のように辺の長さが等しい正方形と正三角形が配置されている。
１辺の長さを求めよ。
ただし，図形は四分円の中心角の二等分線に関して対称である。





図の扇形ＯＰＱにおいて，正三角形ＡＢＣ，正方形ＤＥＦＧを定める．

ＡＢ＝ＡＣ＝ＤＥ＝ＤＧ＝ｒとし，ＥからＯＰに垂線ＥＨを下ろす．

△ＡＢＤにおいて，∠ＡＢＤ＝６０°，∠ＡＤＢ＝９０°より，

$$\mathrm{AD}=\frac{\sqrt{3}}{2}r$$

$$\therefore \mathrm{AE}=\mathrm{AD}+\mathrm{DE}=\frac{\sqrt{3}}{2}r+r=\frac{2+\sqrt{3}}{2}r$$

△ＡＥＨは直角二等辺三角形なので，

$$\mathrm{AH}=\mathrm{EH}=\frac{\mathrm{AE}}{\sqrt{2}}=\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}r$$

△ＯＡＣは直角二等辺三角形なので，$\mathrm{OA}=\dfrac{\mathrm{AC}}{\sqrt{2}}=\dfrac{r}{\sqrt{2}}$

$$\therefore \mathrm{OH}=\mathrm{OA}+\mathrm{AH}=\frac{r}{\sqrt{2}}+\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}r=\frac{4+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}r$$

直角三角形ＯＥＨにおいて，$\mathrm{OH}^2+\mathrm{EH}^2=\mathrm{OE}^2$

$$\therefore \left(\frac{4+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}r\right)^2+\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}r\right)^2=1$$

$$\therefore r^2=\frac{1}{\left(\frac{4+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{8}{16+8\sqrt{3}+3+4+4\sqrt{3}+3}$$

$$=\frac{8}{26+12\sqrt{3}}=\frac{4}{13+6\sqrt{3}}$$

$r>0$ より，$r=\dfrac{2}{\sqrt{13+6\sqrt{3}}}$・・・（答）

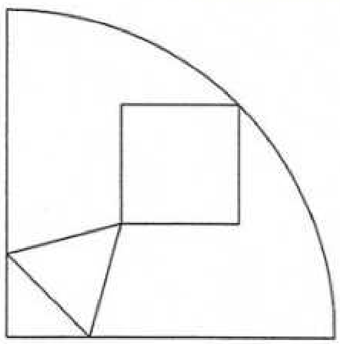
問題２　シリーズ６問目

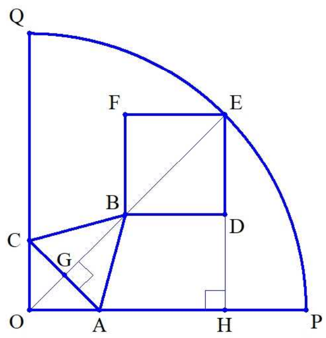
正方形と正三角形の１辺が等しいとき（辺を共有しない），

半径１の四分円内に，図のように辺の長さが等しい正方形と正三角形が配置されている。

１辺の長さを求めよ。

ただし，図形は四分円の中心角の二等分線に関して対称である。





図の扇形ＯＰＱにおいて，正三角形ＡＢＣ，正方形ＢＤＥＦを定める．

ＡＢ＝ＣＡ＝ＢＤ＝ＤＥ＝ｒ，ＡＣの中点をＧとすると，

$OG=AG=\dfrac{r}{2}$，$BG=\dfrac{\sqrt{3}}{2}r$，$BE=\sqrt{2}\,r$ であるから，

$$OE=OG+BG+BE=\frac{r}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}r+\sqrt{2}\,r=1$$

$$\therefore r=\frac{1}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{2}}=\frac{2}{1+\sqrt{3}+2\sqrt{2}}=\frac{2\{2\sqrt{2}-(1+\sqrt{3})\}}{(2\sqrt{2})^2-(1+\sqrt{3})^2}$$

$$=\frac{2(2\sqrt{2}-1-\sqrt{3})}{8-1-2\sqrt{3}-3}=\frac{2(2\sqrt{2}-1-\sqrt{3})}{4-2\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{2}-1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$

$$=\frac{(2\sqrt{2}-1-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{4-3}=4\sqrt{2}+2\sqrt{6}-2-\sqrt{3}-2\sqrt{3}-3$$

$$=2\sqrt{6}-3\sqrt{3}+4\sqrt{2}-5$$ ・・・（答）