

次の一般項が単項式×2の累乗である数列の和を n で表せ。(ただし, (IV), (V) は余力問題)

$$(I) \sum_{k=1}^n k \cdot 2^k \quad (II) \sum_{k=1}^n k^2 \cdot 2^k \quad (III) \sum_{k=1}^n k^3 \cdot 2^k \quad (IV) \sum_{k=1}^n k^4 \cdot 2^k \quad (V) \sum_{k=1}^n k^5 \cdot 2^k$$

解答 $S_i = \sum_{k=1}^n k^i \cdot 2^k$...①とおき, S_i と $2S_i$ の差をとる。

$$2S_i = \sum_{k=1}^n k^i \cdot 2^{k+1} = \sum_{k=1}^n (k-1)^i \cdot 2^k + n^i \cdot 2^{n+1} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{より, } -S_i = \sum_{k=1}^n \{k^i - (k-1)^i\} 2^k - n^i \cdot 2^{n+1}$$

$$\therefore S_i = -\sum_{k=1}^n \{k^i - (k-1)^i\} 2^k + n^i \cdot 2^{n+1} \quad \dots \textcircled{3}$$

$$(I) \textcircled{3} \text{で, } i=0 \text{ とおくと, } S_0 = \sum_{k=1}^n 2^k = \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} = 2^{n+1} - 2$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \text{で, } i=1 \text{ とおくと, } S_1 &= -\sum_{k=1}^n 1 \cdot 2^k + n \cdot 2^{n+1} = -S_0 + n \cdot 2^{n+1} = -(2^{n+1} - 2) + n \cdot 2^{n+1} \quad (\because S_0 \text{ を代入}) \\ &= 2^{n+1}(n-1) + 2 \quad \text{答} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (II) \textcircled{3} \text{で, } i=2 \text{ とおくと, } S_2 &= -\sum_{k=1}^n (2k-1) \cdot 2^k + n^2 \cdot 2^{n+1} = -2S_1 + S_0 + n^2 \cdot 2^{n+1} \\ &= -2\{2^{n+1}(n-1) + 2\} + (2^{n+1} - 2) + n^2 \cdot 2^{n+1} \quad (\because S_0, S_1 \text{ を代入}) \\ &= 2^{n+1}(n^2 - 2n + 3) - 6 \quad \text{答} \end{aligned}$$

$$(III) \textcircled{3} \text{で, } i=3 \text{ とおくと, } S_3 = -\sum_{k=1}^n (3k^2 - 3k + 1) \cdot 2^k + n^3 \cdot 2^{n+1} = -3S_2 + 3S_1 - S_0 + n^3 \cdot 2^{n+1}$$

$$S_0, S_1, S_2 \text{ を代入すると, } S_3 = 2^{n+1}(n^3 - 3n^2 + 9n - 13) + 26 \quad \text{答}$$

$$\begin{aligned} (IV) \textcircled{3} \text{で, } i=4 \text{ とおくと, } S_4 &= -\sum_{k=1}^n (4k^3 - 6k^2 + 4k - 1) 2^k + n^4 \cdot 2^{n+1} \\ &= -4S_3 + 6S_2 - 4S_1 + S_0 + n^4 \cdot 2^{n+1} \end{aligned}$$

$$S_0 \sim S_3 \text{ を代入すると, } S_4 = 2^{n+1}(n^4 - 4n^3 + 18n^2 - 52n + 75) - 150 \quad \text{答}$$

$$\begin{aligned} (V) \textcircled{3} \text{で, } i=5 \text{ とおくと, } S_5 &= -\sum_{k=1}^n (5k^4 - 10k^3 + 10k^2 - 5k + 1) 2^k + n^5 \cdot 2^{n+1} \\ &= -5S_4 + 10S_3 - 10S_2 + 5S_1 - S_0 + n^5 \cdot 2^{n+1} \end{aligned}$$

$$S_0 \sim S_4 \text{ を代入すると, } S_5 = 2^{n+1}(n^5 - 5n^4 + 30n^3 - 130n^2 + 375n - 541) + 1082 \quad \text{答}$$

参考 この方法を繰り返していくと, 次式が得られる。

$$S_6 = \sum_{k=1}^n k^6 \cdot 2^k = 2^{n+1}(n^6 - 6n^5 + 45n^4 - 260n^3 + 1125n^2 - 3246n + 4683) - 9366$$

$$S_7 = \sum_{k=1}^n k^7 \cdot 2^k = 2^{n+1}(n^7 - 7n^6 + 63n^5 - 455n^4 + 2625n^3 - 11361n^2 + 32781n - 47293) + 94586$$

$$S_8 = \sum_{k=1}^n k^8 \cdot 2^k = 2^{n+1}(n^8 - 8n^7 + 84n^6 - 728n^5 + 5250n^4 - 30296n^3 + 131124n^2 - 378344n + 545835) - 1091670$$

$$S_9 = \sum_{k=1}^n k^9 \cdot 2^k = 2^{n+1}(n^9 - 9n^8 + 108n^7 - 1092n^6 + 9450n^5 - 68166n^4 + 393372n^3 - 1702548n^2 + 4912515n - 7087261) + 14174522$$

$$S_{10} = \sum_{k=1}^n k^{10} \cdot 2^k = 2^{n+1}(n^{10} - 10n^9 + 135n^8 - 1560n^7 + 15750n^6 - 136332n^5 + 983430n^4 - 5675160n^3 + 24562575n^2 - 70872610n + 102247563) - 204495126$$

別解

$$f_i(x) = \sum_{k=1}^n k^i \cdot x^k = x + 2^i x^2 + 3^i x^3 + \cdots + n^i x^n \text{ とおくと, 求める式は, } f_i(2) \text{ (} i=1, 2, \dots, 5 \text{) である.}$$

$$(I) \quad x \neq 1 \text{ のとき, } f_0(x) \text{ は等比数列の和であるから, } f_0(x) = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{x(x^n - 1)}{x - 1}$$

$$f_0'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$$

$$xf_0'(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n = x \cdot \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2} = f_1(x)$$

$$\therefore f_1(2) = 2^{n+1}(n-1) + 2 \quad \text{答}$$

(II) 以下, (I) と同様に, 微分して, x を掛け, 2 を代入していく。

$$f_1'(x) = 1 + 2^2x + 3^2x^2 + \cdots + n^2x^{n-1} = \frac{n^2x^{n+2} - (2n^2 + 2n - 1)x^{n+1} + (n+1)^2x^n - x - 1}{(x-1)^3}$$

$$xf_1'(x) = x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + \cdots + n^2x^n = x \cdot \frac{n^2x^{n+2} - (2n^2 + 2n - 1)x^{n+1} + (n+1)^2x^n - x - 1}{(x-1)^3} = f_2(x)$$

$$\therefore f_2(2) = 2^{n+1}(n^2 - 2n + 3) - 6 \quad \text{答}$$

(III)

$$f_2'(x) = \frac{n^3x^{n+3} - (3n^3 + 3n^2 - 3n + 1)x^{n+2} + (3n^3 + 6n^2 - 4)x^{n+1} - (n+1)^3x^n + x^2 + 4x + 1}{(x-1)^4}$$

$$xf_2'(x) = x \cdot \frac{n^3x^{n+3} - (3n^3 + 3n^2 - 3n + 1)x^{n+2} + (3n^3 + 6n^2 - 4)x^{n+1} - (n+1)^3x^n + x^2 + 4x + 1}{(x-1)^4} = f_3(x)$$

$$\therefore f_3(2) = 2^{n+1}(n^3 - 3n^2 + 9n - 13) + 26 \quad \text{答}$$

(IV)

$$f_3'(x) = \frac{1}{(x-1)^5} [n^4x^{n+4} - (4n^4 + 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1)x^{n+3} + (6n^4 + 12n^3 - 6n^2 - 12n + 11)x^{n+2} - (4n^4 + 12n^3 + 6n^2 - 12n - 11)x^{n+1} + (n+1)^4x^n - x^3 - 11x^2 - 11x - 1]$$

$$xf_3'(x) = \frac{x}{(x-1)^5} [n^4x^{n+4} - (4n^4 + 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1)x^{n+3} + (6n^4 + 12n^3 - 6n^2 - 12n + 11)x^{n+2} - (4n^4 + 12n^3 + 6n^2 - 12n - 11)x^{n+1} + (n+1)^4x^n - x^3 - 11x^2 - 11x - 1] = f_4(x)$$

$$\therefore f_4(2) = 2^{n+1}(n^4 - 4n^3 + 18n^2 - 52n + 75) - 150 \quad \text{答}$$

(V)

$$f_4'(x) = \frac{1}{(x-1)^6} [n^5x^{n+5} - (5n^5 + 5n^4 - 10n^3 + 10n^2 - 5n + 1)x^{n+4} + 2(5n^5 + 10n^4 - 10n^3 + 25n - 13)x^{n+3} - 2(5n^5 + 15n^4 - 30n^2 + 33)x^{n+2} + (5n^5 + 20n^4 + 20n^3 - 20n^2 - 50n - 26)x^{n+1} - (n+1)^5x^n + x^4 + 26x^3 + 66x^2 + 26x + 1]$$

$$xf_4'(x) = \frac{x}{(x-1)^6} [n^5x^{n+5} - (5n^5 + 5n^4 - 10n^3 + 10n^2 - 5n + 1)x^{n+4} + 2(5n^5 + 10n^4 - 10n^3 + 25n - 13)x^{n+3} - 2(5n^5 + 15n^4 - 30n^2 + 33)x^{n+2} + (5n^5 + 20n^4 + 20n^3 - 20n^2 - 50n - 26)x^{n+1} - (n+1)^5x^n + x^4 + 26x^3 + 66x^2 + 26x + 1] = f_5(x)$$

$$\therefore f_5(2) = 2^{n+1}(n^5 - 5n^4 + 30n^3 - 130n^2 + 375n - 541) + 1082 \quad \text{答}$$

参考

$$f_5'(x) = \frac{1}{(x-1)^7} [n^6x^{n+6} - (6n^6 + 6n^5 - 15n^4 + 20n^3 - 15n^2 + 6n - 1)x^{n+5} + (15n^6 + 30n^5 - 45n^4 - 20n^3 + 135n^2 - 150n + 57)x^{n+4} - 2(10n^6 + 30n^5 - 15n^4 - 80n^3 + 75n^2 + 120n - 151)x^{n+3} + (15n^6 + 60n^5 + 30n^4 - 160n^3 - 150n^2 + 240n + 302)x^{n+2} - (6n^6 + 30n^5 + 45n^4 - 20n^3 - 135n^2 - 150n - 57)x^{n+1} - x^5 - 57x^4 - 302x^3 - 302x^2 - 57x - 1]$$

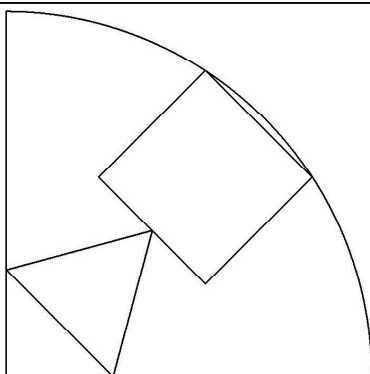
$$xf_5'(x) = \frac{x}{(x-1)^7} [n^6x^{n+6} - (6n^6 + 6n^5 - 15n^4 + 20n^3 - 15n^2 + 6n - 1)x^{n+5} + (15n^6 + 30n^5 - 45n^4 - 20n^3 + 135n^2 - 150n + 57)x^{n+4} - 2(10n^6 + 30n^5 - 15n^4 - 80n^3 + 75n^2 + 120n - 151)x^{n+3} + (15n^6 + 60n^5 + 30n^4 - 160n^3 - 150n^2 + 240n + 302)x^{n+2} - (6n^6 + 30n^5 + 45n^4 - 20n^3 - 135n^2 - 150n - 57)x^{n+1} - x^5 - 57x^4 - 302x^3 - 302x^2 - 57x - 1] = f_6(x)$$

$$\therefore f_6(2) = 2^{n+1}(n^6 - 6n^5 + 45n^4 - 260n^3 + 1125n^2 - 3246n + 4683) - 9366 \quad \text{答}$$

追加問題1

半径1の四分円内に、図のように辺の長さが等しい正方形と正三角形が配置されている。1辺の長さを求めよ。

ただし、図形は四分円の中心角の二等分線に関して対称である。



解答 1辺の長さを a とおき、図のように記号を付ける。

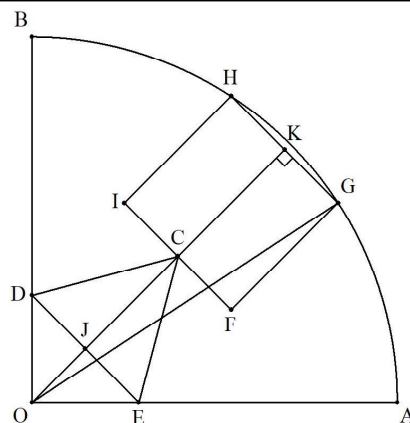
$$\triangle GOK \text{ について, } GO = 1, OK = \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{3}a}{2} + a = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}a,$$

$KG = \frac{a}{2}$ であるから、三平方の定理を適用すると、

$$\left(\frac{3 + \sqrt{3}}{2}a\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 1^2 \quad a^2 = \frac{4}{13 + 6\sqrt{3}} = \frac{4(13 - 6\sqrt{3})}{61}$$

$$a > 0 \text{ より, } a = 2\sqrt{\frac{13 - 6\sqrt{3}}{61}} \quad (\approx 0.413517)$$

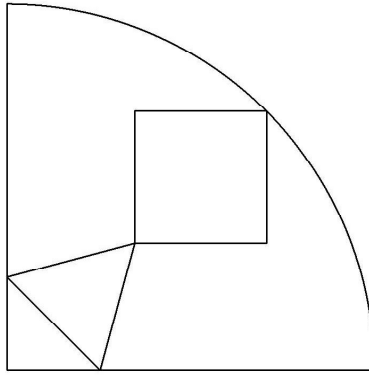
$$\text{よって、求める1辺の長さは、} 2\sqrt{\frac{13 - 6\sqrt{3}}{61}} \quad \text{答}$$



追加問題 2

半径 1 の四分円内に、図のように
辺の長さが等しい正方形と正三角形
が配置されている。1 辺の長さを求
めよ。

ただし、図形は四分円の中心角の二
等分線に関して対称である。



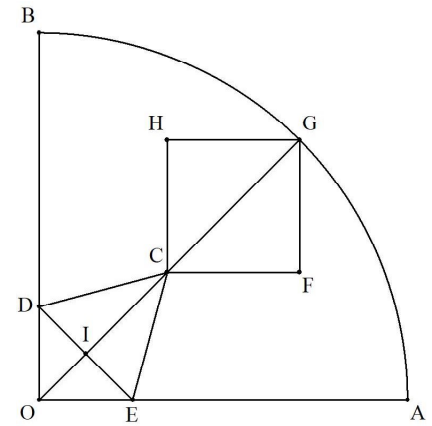
解答 1 辺の長さを a とおき、図のように記号を付ける。

$$OG = OI + IC + CG = \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{3}a}{2} + \sqrt{2}a = 1 \text{ より,}$$

$$a = \frac{2}{2\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1} = \frac{2(2\sqrt{2} - \sqrt{3} - 1)}{8 - (4 + 2\sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{3} - 1}{2 - \sqrt{3}}$$

$$= (2\sqrt{2} - \sqrt{3} - 1)(2 + \sqrt{3}) = -5 + 4\sqrt{2} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{6} \quad (\approx 0.359681)$$

よって、求める 1 辺の長さは、 $-5 + 4\sqrt{2} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{6}$ 答



(2025/9/14 ジョーカー)