

階差による方法

良いアイデアが浮かばなかったなので、次のようにやりました。

求める和を

$$S_m = \sum_{k=1}^n k^m \cdot 2^k$$

とし、ある関数 $F(k) = 2^k Q(k)$ ($Q(k)$ は k の m 次式) の階差 $F(k+1) - F(k)$ の和として表せるとします。つまり、 $F(k+1) - F(k) = k^m 2^k$ となるような $F(k)$ を見つけることができれば、

$$\sum_{k=1}^n k^m \cdot 2^k = \sum_{k=1}^n \{F(k+1) - F(k)\} = F(n+1) - F(1) = 2^{n+1} Q(n+1) - 2Q(1) \cdots \textcircled{1}$$

として、一気に和を計算できます。この式が成り立つには、 $F(k)$ が一意に定まる必要がありますが、そのためには、 $Q(k)$ が一意に定まることを言えばよいです。

$F(k+1) - F(k) = k^m 2^k$ を変形すると、

$F(k+1) - F(k) = k^m 2^k \Rightarrow 2^{k+1} Q(k+1) - 2^k Q(k) = k^m 2^k \Rightarrow 2Q(k+1) - Q(k) = k^m$
となりますが、 $Q(k)$ は m 次の多項式なので、

$$Q(k) = c_m k^m + c_{m-1} k^{m-1} + \cdots + c_0$$

として、 $2Q(k+1) - Q(k) = k^m$ に当てはめると、 k の m 次についての恒等式になります。 $k^m, k^{m-1}, \dots, k^0$ (定数項) の係数をそれぞれ比較していくと、 $m+1$ 個の係数 ($c_m, \dots, c_0$) に関する $m+1$ 個の連立一次方程式が得られます。この方程式は、常に次数が高い係数から順番に解くことができるため、 $Q(k)$ は次数 m の多項式として一意に存在します。

そうすると、 $Q(k)$ は補足1に示したように、

$$Q(k) = \sum_{i=0}^m (-2)^i \Delta^i k^m$$

と求まります。これらの計算値を①式に代入すると、一般項が求まって、

$$S_m = \sum_{k=1}^n k^m \cdot 2^k = 2^{n+1} Q(n+1) - 2Q(1)$$

となります。

後は、ひたすら計算です。すると、結果は以下ようになります(計算過程は補足2に記載)。

$$(I) (n-1)2^{n+1} + 2$$

$$(II) (n^2 - 2n + 3)2^{n+1} - 6$$

$$(III) (n^3 - 3n^2 + 9n - 13)2^{n+1} + 26$$

$$(IV) (n^4 - 4n^3 + 18n^2 - 52n + 75)2^{n+1} - 150$$

$$(V) (n^5 - 5n^4 + 30n^3 - 130n^2 + 375n - 541)2^{n+1} + 1082$$

別解 漸化式による方法

愚直にやってみました。階差による方法のように、一般項を美しい数式で表現できませんが(そのようなことをする必要ありませんが)、前の計算結果を、次の計算に活かすので、計算量は少なくて済みます。

求める和を

$$S_m = \sum_{k=1}^n k^m \cdot 2^k$$

とします。 S_0 はあつた方が都合がよいので、次のように定義しておきます。

$$S_0 = \sum_{k=1}^n k^0 \cdot 2^k = \sum_{k=1}^n 2^k = 2 \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2(2^n - 1)$$

すると、

$$2S_m = \sum_{k=1}^n k^m \cdot 2^{k+1} = \sum_{k=1}^n (k-1)^m \cdot 2^k + n^m \cdot 2^{n+1}$$

なので、

$$2S_m - S_m = \sum_{k=1}^n (k-1)^m \cdot 2^k + n^m \cdot 2^{n+1} - \sum_{k=1}^n k^m \cdot 2^k$$

ですが、

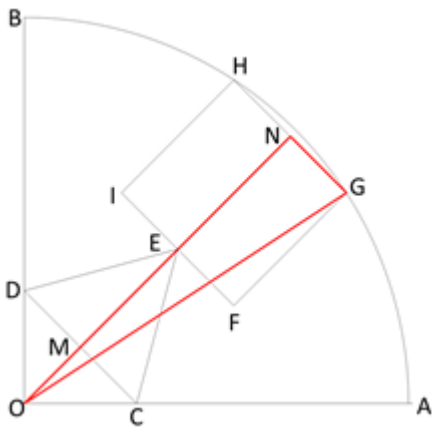
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (k-1)^m \cdot 2^k - \sum_{k=1}^n k^m \cdot 2^k &= \sum_{k=1}^n \{(k-1)^m - k^m\} \cdot 2^k \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \binom{m}{i} k^{m-i} (-1)^i \cdot 2^k = \sum_{i=1}^m \binom{m}{i} (-1)^i \sum_{k=1}^n k^{m-i} \cdot 2^k \end{aligned}$$

ですから、

$$S_m = \sum_{i=1}^m \binom{m}{i} (-1)^i \sum_{k=1}^n k^{m-i} \cdot 2^k + n^m \cdot 2^{n+1} = \sum_{i=1}^m \binom{m}{i} (-1)^i S_{m-i} + n^m \cdot 2^{n+1}$$

です。これを計算すると、前問と同じ結果になります(計算過程は補足3に記載)。

追加問題1



図のように、各点に記号を付けます。ただし、**M**はDCの midpoint、**N**はGHの midpointとします。正方形と正三角形の一辺の長さを**a**とし、 $\triangle OGN$ に三平方の定理を適用すると、

$$ON^2 + GN^2 = OG^2$$

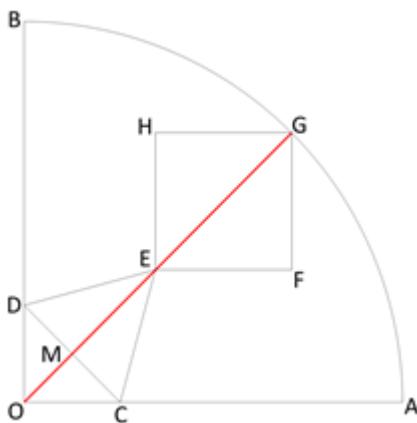
$$\Rightarrow (\text{OM} + \text{EM} + \text{EN})^2 + \left(\frac{\text{GH}}{2}\right)^2 = \text{OG}^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{CD}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} CE + FG \right)^2 + \left(\frac{GH}{2} \right)^2 = OG^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}a + a\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 1^2 \Rightarrow a = \pm \frac{2\sqrt{13 - 6\sqrt{3}}}{\sqrt{61}}$$

です。ここで、 $a > 0$ なので、一辺の長さは $\frac{2\sqrt{13-6\sqrt{3}}}{\sqrt{61}} = 0.413517\dots$ です。

追加問題2



図のように、各点に記号を付けます。ただし、**M**は**DC**の中点とします。正方形と正三角形の一辺の長さを**a**とすると、

$$OM + EM + EG = OG \Rightarrow \frac{CD}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}CE + \sqrt{2}FG = OA$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}a + \sqrt{2}a = 1 \Rightarrow a = 4\sqrt{2} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{6} - 5$$

です。

よって、一辺の長さは $4\sqrt{2} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{6} - 5 = 0.35968 \dots$ です。

補足1 $Q(k)$ の一般式

まずは、シフト演算子 E と階差演算子(差分演算子) Δ を導入します。

E は関数の変数 k を $k + 1$ に置き換える操作で、

$$EQ(k) = Q(k + 1)$$

です。また、 Δ は関数の次の値から現在の値を引く操作で、

$$\Delta Q(k) = Q(k + 1) - Q(k)$$

です。この2つの演算子の間には、

$$EQ(k) = Q(k + 1) = Q(k) + \{Q(k + 1) - Q(k)\} = Q(k) + \Delta Q(k)$$

という関係があります。つまり、

$$E = 1 + \Delta$$

と書き直すことができます(ただし、 1 は何もしないという操作です)。

$Q(k)$ に E を適用すると、

$$2Q(k + 1) - Q(k) = k^m \Rightarrow 2EQ(k) - 1Q(k) = k^m \Rightarrow (2E - 1)Q(k) = k^m$$

となります。すると、 E を Δ で置き換えると

$$(2E - 1)Q(k) = \{2(1 + \Delta) - 1\}Q(k) = k^m \Rightarrow (1 + 2\Delta)Q(k) = k^m$$

ですが、 $1 + 2\Delta$ の逆数を作用させて、 $Q(k)$ について解くと、

$$Q(k) = \frac{k^m}{1 + 2\Delta} = \{1 - 2\Delta + (2\Delta)^2 - (2\Delta)^3 + \dots\}k^m$$

です。ここで、 Δ を $m + 1$ 以上に作用させると 0 になるので、次式が導かれます。

$$Q(k) = \sum_{i=0}^m (-2)^i \Delta^i k^m$$

(Ⅰ)	k^1の階差を計算 $\Delta^0 k^1 = k$ $\Delta^1 k^1 = (k+1)^1 - k^1 = 1$	Q(k)を計算 $Q(k) = \sum_{i=0}^1 (-2)^i \Delta^i k^1 = (-2)^0 \Delta^0 k^1 + (-2)^1 \Delta^1 k^1$ $= 1k - 2 \cdot 1 = k - 2$ S₁を計算 $S_1 = 2^{n+1}Q(n+1) - 2Q(1)$ $= 2^{n+1}\{(n+1) - 2\} - 2(1 - 2)$ $= (n-1)2^{n+1} + 2$
(Ⅱ)	k^2の階差を計算 $\Delta^0 k^2 = k^2$ $\Delta^1 k^2 = (k+1)^2 - k^2 = 2k+1$ $\Delta^2 k^2 = \Delta(\Delta^1 k^2) = \Delta(2k+1) = \{2(k+1) + 1\} - (2k+1) = 2$	Q(k)を計算 $Q(k) = \sum_{i=0}^2 (-2)^i \Delta^i k^2 = (-2)^0 \Delta^0 k^2 + (-2)^1 \Delta^1 k^2 + (-2)^2 \Delta^2 k^2$ $= 1k^2 - 2(2k+1) + 4 \cdot 2 = k^2 - 4k + 6$ S₂を計算 $S_3 = 2^{n+1}Q(n+1) - 2Q(1)$ $= 2^{n+1}\{(n+1)^2 - 4(n+1) + 6\} - 2(1^2 - 4 \cdot 1 + 6)$ $= (n^2 - 2n + 3)2^{n+1} - 6$
(Ⅲ)	k^3の階差を計算 $\Delta^0 k^3 = k^3$ $\Delta^1 k^3 = (k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ $\Delta^2 k^3 = \Delta(\Delta^1 k^3) = \Delta(3k^2 + 3k + 1)$ $= \{3(k+1)^2 + 3(k+1) + 1\} - (3k^2 + 3k + 1) = 6k + 6$ $\Delta^3 k^3 = \Delta(\Delta^2 k^3) = \Delta(6k + 6) = \{6(k+1) + 6\} - (6k + 6) = 6$	Q(k)を計算 $Q(k) = \sum_{i=0}^3 (-2)^i \Delta^i k^3 = (-2)^0 \Delta^0 k^3 + (-2)^1 \Delta^1 k^3 + (-2)^2 \Delta^2 k^3 + (-2)^3 \Delta^3 k^3$ $= 1k^3 - 2(3k^2 + 3k + 1) + 4(6k + 6) - 8 \cdot 6 = k^3 - 6k^2 + 18k - 26$ S₃を計算 $S_3 = 2^{n+1}Q(n+1) - 2Q(1)$ $= 2^{n+1}\{(n+1)^3 - 6(n+1)^2 + 18(n+1) - 26\} - 2(1^3 - 6 \cdot 1^2 + 18 \cdot 1 - 26)$ $= (n^3 - 3n^2 + 9n - 13)2^{n+1} + 26$
(Ⅳ)	k^4の階差を計算 $\Delta^0 k^4 = k^4$ $\Delta^1 k^4 = (k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$ $\Delta^2 k^4 = \Delta(\Delta^1 k^4) = \Delta(4k^3 + 6k^2 + 4k + 1)$ $= \{4(k+1)^3 + 6(k+1)^2 + 4(k+1) + 1\} - (4k^3 + 6k^2 + 4k + 1)$ $= 12k^2 + 24k + 14$ $\Delta^3 k^4 = \Delta(\Delta^2 k^4) = \Delta(12k^2 + 24k + 14)$ $= \{12(k+1)^2 + 24(k+1) + 14\} - (12k^2 + 24k + 14) = 24k + 36$ $\Delta^4 k^4 = \Delta(\Delta^3 k^4) = \Delta(24k + 36) = \{24(k+1) + 36\} - (24k + 36) = 24$	Q(k)を計算 $Q(k) = \sum_{i=0}^4 (-2)^i \Delta^i k^4 = (-2)^0 \Delta^0 k^4 + (-2)^1 \Delta^1 k^4 + (-2)^2 \Delta^2 k^4 + (-2)^3 \Delta^3 k^4 + (-2)^4 \Delta^4 k^4$ $= 1k^4 - 2(4k^3 + 6k^2 + 4k + 1) + 4(12k^2 + 24k + 14) - 8(24k + 36) + 16 \cdot 24$ $= k^4 - 8k^3 + 36k^2 - 104k + 150$ S₄を計算 $S_4 = 2^{n+1}Q(n+1) - 2Q(1)$ $= 2^{n+1}\{(n+1)^4 - 8(n+1)^3 + 36(n+1)^2 - 104(n+1) + 150\}$ $- 2(1^4 - 8 \cdot 1^3 + 36 \cdot 1^2 - 104 \cdot 1 + 150)$ $= (n^4 - 4n^3 + 18n^2 - 52n + 75)2^{n+1} - 150$

(V)	k^5の階差を計算 $\Delta^0 k^5 = k^5$ $\Delta^1 k^5 = (k+1)^5 - k^5 = 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1$ $\Delta^2 k^5 = \Delta(\Delta^1 k^5) = \Delta(5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1)$ $= \{5(k+1)^4 + 10(k+1)^3 + 10(k+1)^2 + 5(k+1) + 1\}$ $- (5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1)$ $= 20k^3 + 60k^2 + 70k + 30$ $\Delta^3 k^5 = \Delta(\Delta^2 k^5) = \Delta(20k^3 + 60k^2 + 70k + 30)$ $= \{20(k+1)^3 + 60(k+1)^2 + 70(k+1) + 30\} - (20k^3 + 60k^2 + 70k + 30)$ $= 60k^2 + 180k + 150$ $\Delta^4 k^5 = \Delta(\Delta^3 k^5) = \Delta(60k^2 + 180k + 150)$ $= \{60(k+1)^2 + 180(k+1) + 150\} - (60k^2 + 180k + 150) = 120k + 240$ $\Delta^5 k^5 = \Delta(\Delta^4 k^5) = \Delta(120k + 240) = \{120(k+1) + 240\} - (120k + 240) = 120$	$Q(k)$を計算 $Q(k) = \sum_{i=0}^5 (-2)^i \Delta^i k^5 = (-2)^0 \Delta^0 k^5 + (-2)^1 \Delta^1 k^5 + (-2)^2 \Delta^2 k^5 + (-2)^3 \Delta^3 k^5 + (-2)^4 \Delta^4 k^5 + (-2)^5 \Delta^5 k^5$ $= 1k^5 - 2(5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1) + 4(20k^3 + 60k^2 + 70k + 30) - 8(60k^2 + 180k + 150)$ $+ 16(120k + 240) + 32 \cdot 120$ $= k^5 - 10k^4 + 60k^3 - 260k^2 + 750k - 1082$ S_5を計算 $S_5 = 2^{n+1}Q(n+1) - 2Q(1)$ $= 2^{n+1}\{(n+1)^5 - 10(n+1)^4 + 60(n+1)^3 - 260(n+1)^2 + 750(n+1) - 1082\}$ $- 2(1^5 - 10 \cdot 1^4 + 60 \cdot 1^3 - 260 \cdot 1^2 + 750 \cdot 1 - 1082)$ $= (n^5 - 5n^4 + 30n^3 - 130n^2 + 375n - 541)2^{n+1} + 1082$
-----	---	--

(I)	$S_1 = \sum_{i=1}^1 \binom{1}{i} (-1)^i S_{1-i} + n^1 \cdot 2^{n+1}$ $= \binom{1}{1} (-1)^1 S_0 + n^1 \cdot 2^{n+1}$ $= \binom{1}{1} (-1)^1 2(2^n - 1) + n^1 \cdot 2^{n+1} = (n - 1)2^{n+1} + 2$
(II)	$S_2 = \sum_{i=1}^2 \binom{2}{i} (-1)^i S_{2-i} + n^2 \cdot 2^{n+1}$ $= \binom{2}{1} (-1)^1 S_1 + \binom{2}{2} (-1)^2 S_0 + n^2 \cdot 2^{n+1}$ $= \binom{2}{1} (-1)^1 \{(n - 1)2^{n+1} + 2\} + \binom{2}{2} (-1)^2 (2^{n+1} - 2) + n^2 \cdot 2^{n+1}$ $= (n^2 - 2n + 3)2^{n+1} - 6$
(III)	$S_3 = \sum_{i=1}^3 \binom{3}{i} (-1)^i S_{3-i} + n^3 \cdot 2^{n+1}$ $= \binom{3}{1} (-1)^1 S_2 + \binom{3}{2} (-1)^2 S_1 + \binom{3}{3} (-1)^3 S_0$ $= \binom{3}{1} (-1)^1 \{(n^2 - 2n + 3)2^{n+1} - 6\} + \binom{3}{2} (-1)^2 \{(n - 1)2^{n+1} + 2\} + \binom{3}{3} (-1)^3 (2^{n+1} - 2)$ $= (n^3 - 3n^2 + 9n - 13)2^{n+1} + 26$
(IV)	$S_4 = \sum_{i=1}^4 \binom{4}{i} (-1)^i S_{4-i} + n^4 \cdot 2^{n+1}$ $= \binom{4}{1} (-1)^1 S_3 + \binom{4}{2} (-1)^2 S_2 + \binom{4}{3} (-1)^3 S_1 + \binom{4}{4} (-1)^4 S_0 + n^4 \cdot 2^{n+1}$ $= \binom{4}{1} (-1)^1 \{(n^3 - 3n^2 + 9n - 13)2^{n+1} + 26\} + \binom{4}{2} (-1)^2 \{(n^2 - 2n + 3)2^{n+1} - 6\} + \binom{4}{3} (-1)^3 \{(n - 1)2^{n+1} + 2\} + \binom{4}{4} (-1)^4 (2^{n+1} - 2) + n^4 \cdot 2^{n+1}$ $= (n^4 - 4n^3 + 18n^2 - 52n + 75)2^{n+1} - 150$
(V)	$S_5 = \sum_{i=1}^5 \binom{5}{i} (-1)^i S_{5-i} + n^5 \cdot 2^{n+1}$ $= \binom{5}{1} (-1)^1 S_4 + \binom{5}{2} (-1)^2 S_3 + \binom{5}{3} (-1)^3 S_2 + \binom{5}{4} (-1)^4 S_1 + \binom{5}{5} (-1)^5 S_0 + n^5 \cdot 2^{n+1}$ $= \binom{5}{1} (-1)^1 \{(n^4 - 4n^3 + 18n^2 - 52n + 75)2^{n+1} - 150\} + \binom{5}{2} (-1)^2 \{(n^3 - 3n^2 + 9n - 13)2^{n+1} + 26\} + \binom{5}{3} (-1)^3 \{(n^2 - 2n + 3)2^{n+1} - 6\} + \binom{5}{4} (-1)^4 \{(n - 1)2^{n+1} + 2\} + \binom{5}{5} (-1)^5 (2^{n+1} - 2) + n^5 \cdot 2^{n+1}$ $= (n^5 - 5n^4 + 30n^3 - 130n^2 + 375n - 541)2^{n+1} + 1082$