● 問題 459 解答＜三角定規＞

［問題］

（Ⅰ） $S_1=\sum_{k=1}^{n}k\cdot 2^k$

$$S_0=\sum_{k=1}^{n}2^k=\frac{2^{n+1}-2}{2-1}=2^{n+1}-2\ \cdots①$$ とする。

$$S_1-S_0=\sum_{k=1}^{n}(k-1)2^k=2\sum_{k=1}^{n}(k-1)2^{k-1}=2(S_1-n\cdot 2^n)$$

$$\therefore\ S_1=n\cdot 2^{n+1}-S_0=\boldsymbol{(n-1)2^{n+1}+2}\ \cdots②\ (\because ①)\ \cdots[\text{答}]$$

（Ⅱ） $S_2=\sum_{k=1}^{n}k^2\cdot 2^k$

$$S_2-2S_1+S_0=\sum_{k=1}^{n}(k^2-2k+1)2^k=2\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2\cdot 2^{k-1}=2(S_2-n^2\cdot 2^n)$$

$$\therefore\ S_2=n^2\cdot 2^{n+1}-2S_1+S_0=n^2\cdot 2^{n+1}-(2n-2)2^{n+1}-4+2^{n+1}-2$$

$$=\boldsymbol{(n^2-2n+3)2^{n+1}-6}\ \cdots③\ \cdots[\text{答}]\ (\because ①②)$$

（Ⅲ） $S_3=\sum_{k=1}^{n}k^3\cdot 2^k$

$$S_3-3S_2+3S_1-S_0=\sum_{k=1}^{n}(k^3-3k^2+3k-1)2^k=2\sum_{k=1}^{n}(k-1)^3\cdot 2^{k-1}=2(S_3-n^3\cdot 2^n)$$

$$\therefore\ S_3=n^3\cdot 2^{n+1}-3S_2+3S_1-S_0=2^{n+1}\{n^3-3(n^2-2n+3)+3(n-1)-1\}+18+6+2$$

$$=\boldsymbol{(n^3-3n^2+9n-13)2^{n+1}+26}\ \cdots④\ \cdots[\text{答}]\ (\because ①②③)$$

（Ⅳ） $S_4=\sum_{k=1}^{n}k^4\cdot 2^k$

（Ⅰ)(Ⅱ)(Ⅲ)の過程と同様にして，$S_4-4S_3+6S_2-4S_1+S_0=2(S_4-n^4\cdot 2^n)$

$$\therefore\ S_4=n^4\cdot 2^{n+1}-4S_3+6S_2-4S_1+S_0=2^{n+1}\{n^4-4(n^3-3n^2+9n-13)+6(n^2-2n+3)-4(n-1)+1\}-150$$

$$=\boldsymbol{(n^4-4n^3+18n^2-52n+75)2^{n+1}-150}\ \cdots⑤\ \cdots[\text{答}]\ (\because ①②③④)$$

（Ⅴ） $S_5=\sum_{k=1}^{n}k^5\cdot 2^k$

同様にして，$S_5-5S_4+10S_3-10S_2+5S_1-S_0=2(S_5-n^5\cdot 2^n)$

$$\therefore\ S_5=n^5\cdot 2^{n+1}-5S_4+10S_3-10S_2+5S_1-S_0$$

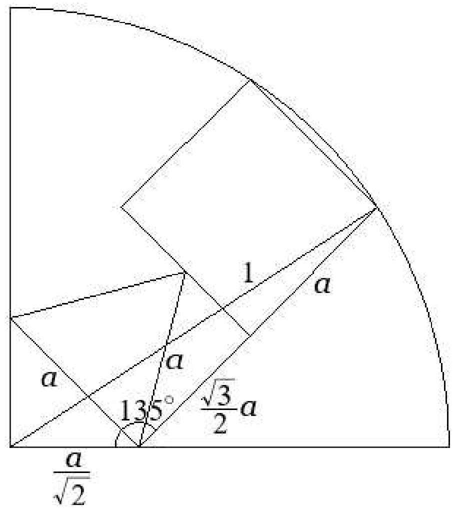
$$=2^{n+1}\{n^4-5(n^4-4n^3+18n^2-5n+75)+10(n^3-3n^2+9n-13)$$

$$-10(n^2-2n+3)+5(n-1)-1\}+1082$$

$$=\boldsymbol{(n^5-5n^4+30n^3-130n^2+375n-541)2^{n+1}+1082}\ \cdots⑥\ \cdots[\text{答}]\ (\because ①②③④⑤)$$

《追加問題》

［問題１］求める長さを a とすると, 右図のようになるから,

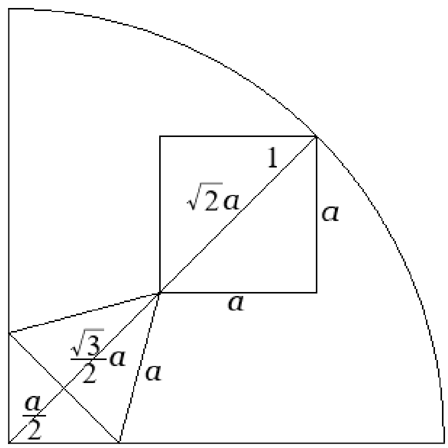


$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)^2a^2-2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}a\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)a\cdot\cos135°\ =1^2$$

整理して, $\dfrac{13+6\sqrt{3}}{4}a^2=1$

$$\therefore\ a=\frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{13+6\sqrt{3}}}}=\mathbf{2}\sqrt{\frac{\mathbf{13-6\sqrt{3}}}{\mathbf{61}}}\quad(=0.4135\cdots)\ \cdots[答]$$

［問題２］求める長さを a とすると, 右図のようになるから,



$$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{2}\right)a=1$$

$$\therefore\ a=\frac{2}{1+2\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

$$=\mathbf{-5+4\sqrt{2}-3\sqrt{3}+2\sqrt{6}}\quad(=0.3596\cdots)\ \cdots[答]$$