

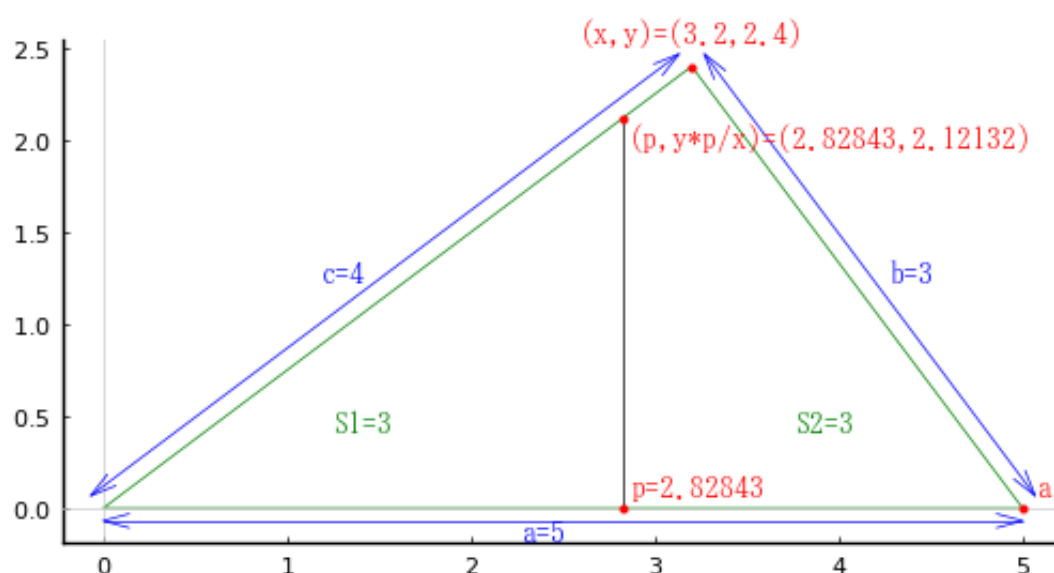
数学的な連続応募問題

第460回 三角形の面積の二等分+NHKの算額

三角形 ABC において, $AB \cong AC$ とする。辺 BC 上の点 P より垂線を引き, 辺 AB の交点を Q とする。このとき, 垂線 PQ は三角形 ABC の面積を二等分している。ただし, 三辺の長さを $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ とする。

設問1 辺 BP の長さを a, b, c で表せ。

設問2 点 P を作図せよ。



点 $B : (0, 0)$ を原点にとり, $A : (x, y)$, $C : (a, 0)$, $P : (p, 0)$ とおき, 以下の連立方程式を [Julia](#) で解く。

```
using SymPy
@syms a::positive, b::positive, c::positive, p::positive,
      x::positive, y::positive
eq1 = x^2 + y^2 - c^2
eq2 = (a - x)^2 + y^2 - b^2
eq3 = 2p^2*y/x - a*y
res = solve([eq1, eq2, eq3], (p, x, y))[1];
```

```
# p: BP の長さ
@show(res[1])
```

```
res[1] = sqrt(a^2 - b^2 + c^2)/2
```

$$\frac{\sqrt{a^2 - b^2 + c^2}}{2}$$

たとえば, $a = 5, b = 3, c = 5$ のとき, $BP = 2.82842712474619$ である。

```
res[1](a => 5, b => 3, c => 4).evalf()
```

2.82842712474619

```
# x
@show(res[2])
```

```
res[2] = (a^2 - b^2 + c^2)/(2*a)
```

$$\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}$$

```
# y
@show(res[3])
```

```
res[3] = sqrt(-a^4 + 2*a^2*b^2 + 2*a^2*c^2 - b^4 +
              2*b^2*c^2 - c^4)/(2*a)
```

$$\frac{\sqrt{-a^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 - b^4 + 2b^2c^2 - c^4}}{2a}$$

```
using Plots
using Printf
function segment(x1, y1, x2, y2, color=:black;
                 linestyle=:solid, lw=0.5)
    plot!([x1, x2], [y1, y2], color=color;
          linestyle=linestyle, lw=lw)
end;
function point(x, y, string="", color=:green,
               position=:left, vertical=:top;
```

```

        fontsize=10, mark=true, delta=0,
        deltax=0)
mark && scatter!([x], [y], color=color,
                markerstrokewidth=0, markersize=3)
annotate!(x + deltax, y + delta, text(string,
                fontsize, position, color, vertical))
end;

function dimension_line(x1, y1, x2, y2, str="",
                        color=:black, position=:center,
                        vertical=:vcenter; dx=0, dy=0,
                        length=0.2,  $\alpha$ = $\pi/12$ , lw=0.5,
                        deltax=0, delta=0)
plot!(dx .+ [x1, x2], dy .+ [y1, y2],
      color=color, lw=lw, label="")
 $\theta$  = atan(y2 - y1, x2 - x1)
arrow1_x = x1 + length * cos( $\theta$  -  $\alpha$ )
arrow1_y = y1 + length * sin( $\theta$  -  $\alpha$ )
arrow2_x = x1 + length * cos( $\theta$  +  $\alpha$ )
arrow2_y = y1 + length * sin( $\theta$  +  $\alpha$ )
arrow3_x = x2 + length * cos( $\theta$  +  $\pi$  -  $\alpha$ )
arrow3_y = y2 + length * sin( $\theta$  +  $\pi$  -  $\alpha$ )
arrow4_x = x2 + length * cos( $\theta$  +  $\pi$  +  $\alpha$ )
arrow4_y = y2 + length * sin( $\theta$  +  $\pi$  +  $\alpha$ )
plot!(dx .+ [arrow1_x, x1, arrow2_x],
      dy .+ [arrow1_y, y1, arrow2_y],
      color=color, lw=lw, label="")
plot!(dx .+ [arrow3_x, x2, arrow4_x],
      dy .+ [arrow3_y, y2, arrow4_y],
      color=color, lw=lw, label="")
annotate!((x1 + x2)/2 + dx + deltax,
          (y1 + y2)/2 + dy + delta, text(str,
          position, color, vertical, 10))
end;

function draw(a, b, c, more=false)
pyplot(size=(500, 500), grid=false, aspectratio=1,
        label="", fontfamily="IPAMincho")
(p, x, y) = (sqrt(a^2 - b^2 + c^2)/2,
            (a^2 - b^2 + c^2)/(2*a),
            sqrt(-a^4 + 2*a^2*b^2 + 2*a^2*c^2 -
                b^4 + 2*b^2*c^2 - c^4)/(2*a))
@printf("p = %g; x = %g; y = %g\n", p, x, y)
plot([0, a, x, 0], [0, 0, y, 0],
     color=:green, lw=0.5)
segment(p, 0, p, y*p/x)
if more
    delta = (fontheight =
            (ylims()[2] - ylims()[1]) / 500 * 10 * 2) / 3 # size[2] * fonts

```

```

hline!([0], color=:gray80, lw=0.5)
vline!([0], color=:gray80, lw=0.5)
point(p, 0, @sprintf("p=%g", p), :red,
      :left, :bottom, delta=delta, deltax=delta)
point(p, y*p/x, @sprintf("(p,y*p/x)=(%g,%g)",
      p, y*p/x), :red, :left, delta=-delta,
      deltax=delta)
point(x, y, @sprintf("(x,y)=(%g,%g)", x,y),
      :red, :center, :bottom, delta=3delta)
point(a, 0, " a", :red, :left, :bottom, delta=delta)
point(p/2, y*p/4x, @sprintf("S1=%g", p^2*y/2x),
      :green, :center, mark=false)
point((a + p)/2, y*p/4x,
      @sprintf("S2=%g", (y*p/x + y)*(x - p)/2 +
      (a - x)*y/2), :green, :center, mark=false)
dimension_line(0, -2delta, a, -2delta,
      @sprintf("a=%g", a), :blue, :center,
      delta=-2delta, deltax=-3delta, length=0.03a)
dimension_line(a + 2delta, 2delta, x + 2delta,
      y + 2delta, @sprintf("b=%g", b),
      :blue, :left, :vcenter, deltax=3delta,
      length=0.03a)
dimension_line(-2delta, 2delta, x - 2delta,
      y + 2delta, @sprintf("c=%g", c),
      :blue, :right, :vcenter, deltax=-3delta,
      length=0.03a)

end
end;

draw(5, 3, 4, true)

```