

第 460 回

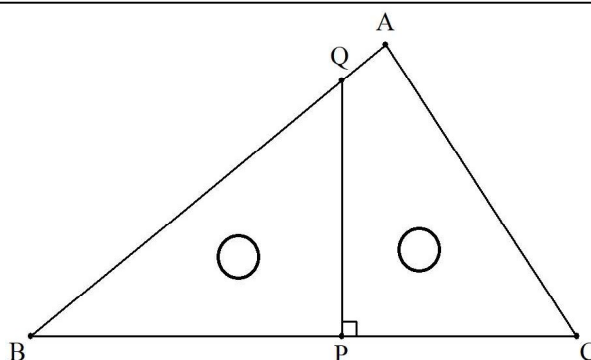
三角形 ABC において、 $AB \geq AC$ とする。

辺 BC 上の点 P より垂線を引き、辺 AB との交点を Q とする。このとき、垂線 PQ は三角形 ABC の面積を二等分している。

ただし、3 辺の長さを $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ とする。

設問 1 辺 BP の長さを a, b, c で表せ。

設問 2 点 P を作図せよ。



【解答】

設問 1

$BP = p$ とおく。

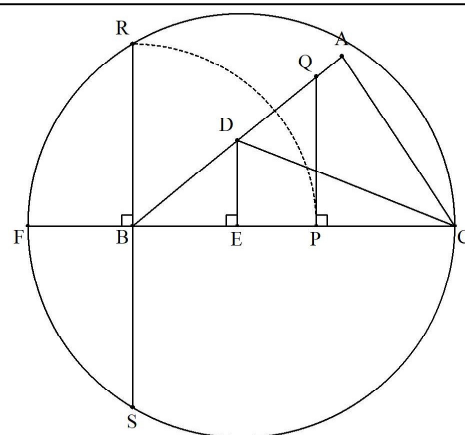
AB の中点 D から BC に下した垂線の足を E とする。

$\triangle QBP$ と $\triangle DBC$ について、 $\triangle QBP \sim \triangle DBC$ で、 $\angle B$ は共通であるから、

$$BQ \cdot BP = BD \cdot BC \quad \therefore \frac{p}{\cos B} \cdot p = \frac{c}{2} \cdot a \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} p^2 &= \frac{ac}{2} \cos B = \frac{ac}{2} \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \quad (\because \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}) \\ &= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{4} \end{aligned}$$

$$p > 0 \text{ より, } p = \frac{\sqrt{c^2 + a^2 - b^2}}{2} \quad \text{よって, } BP = \frac{\sqrt{c^2 + a^2 - b^2}}{2} \quad \text{答}$$



設問 2

【作図】

AB の中点 D から BC に下した垂線の足を E とする。

CB の延長上に点 F を $BE = BF$ となるようにとる。

FC を直径とする円を描く。(G は FC の中点で円の中心である。)

FC に垂直で B を通る直線と円との交点を図のように R, S とする。

このとき、点 P は、BC 上に $BR = BP$ となるようにとる。

【証明】

方べきの定理により、 $RB \cdot BS = FB \cdot BC$

ここで、 $RB = BS = BP$, $FB = BE$ であるから、 $BP^2 = BE \cdot BC$

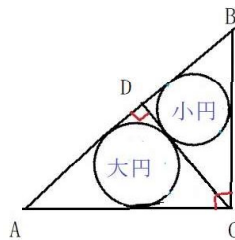
$$BP = p, \quad BE = \frac{c}{2} \cos B, \quad BC = a \text{ であるから, } p^2 = \frac{c}{2} \cos B \cdot a$$

$$\text{変形すると, } \frac{p}{\cos B} \cdot p = \frac{c}{2} \cdot a$$

これは①と同じである。 終

別問題

$\angle C = 90^\circ$ の直角三角形 ABC において、点 C から斜辺 AB に図のように垂線 CD を引く。 $\triangle ACD$, $\triangle BCD$ の内接円を大円、小円とする。大円、小円の直径をそれぞれ、32 尺、24 尺としたとき、直角三角形 ABC の 3 辺の長さを求めよ。



【解答】 $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ とおくと、 $\angle C = 90^\circ$ の直角三角形であるから、

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$\triangle ABC$ の内接円、大円、小円の直径をそれぞれ d , d_1 , d_2 とおく。

$$d = a + b - c \quad \dots \textcircled{2} \text{である。}$$

$\triangle ABC \sim \triangle ADC \sim \triangle BCD$ より、相似比は $c:b:a$ であるから、

$$d:d_1:d_2 = c:b:a \quad \dots \textcircled{3} \text{である。}$$

これより得られる $a = \frac{cd_2}{d}$, $b = \frac{cd_1}{d}$ を①に代入すると、 $\left(\frac{cd_2}{d}\right)^2 + \left(\frac{cd_1}{d}\right)^2 = c^2$

$$\therefore d_1^2 + d_2^2 = d^2$$

$$\text{したがって、} d = \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$$

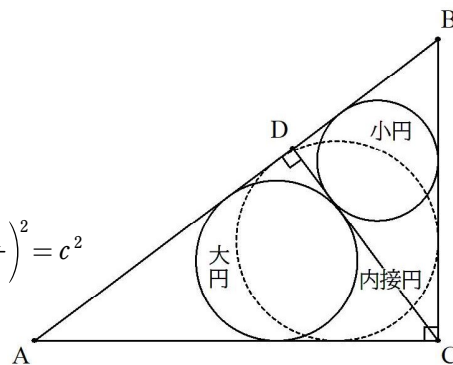
③より、 $a = d_2 k$, $b = d_1 k$, $c = dk$ とおけるから、②に代入すると、

$$d = d_2 k + d_1 k - dk \quad \therefore k = \frac{d}{d_1 + d_2 - d}$$

$$\text{したがって、} a = \frac{d_2 \sqrt{d_1^2 + d_2^2}}{d_1 + d_2 - \sqrt{d_1^2 + d_2^2}}, \quad b = \frac{d_1 \sqrt{d_1^2 + d_2^2}}{d_1 + d_2 - \sqrt{d_1^2 + d_2^2}}, \quad c = \frac{d_1^2 + d_2^2}{d_1 + d_2 - \sqrt{d_1^2 + d_2^2}} \text{ となる。}$$

仮定より、 $d_1 = 32$, $d_2 = 24$ のとき、 $d = \sqrt{d_1^2 + d_2^2} = 40$ より、 $a = 60$, $b = 80$, $c = 100$ となる。

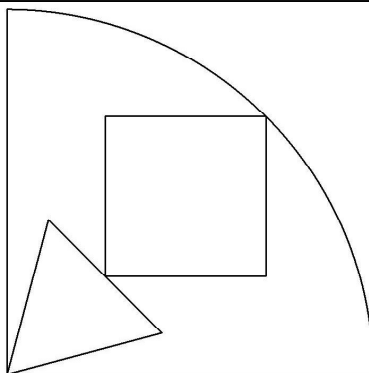
よって、 $BC = 60$ (尺), $CA = 80$ (尺), $AB = 100$ (尺) 　 答



追加問題 1

半径 1 の四分円内に、図のように辺の長さが等しい正方形と正三角形が配置されている。1 辺の長さを求めよ。

ただし、図形は四分円の中心角の二等分線に関して対称である。

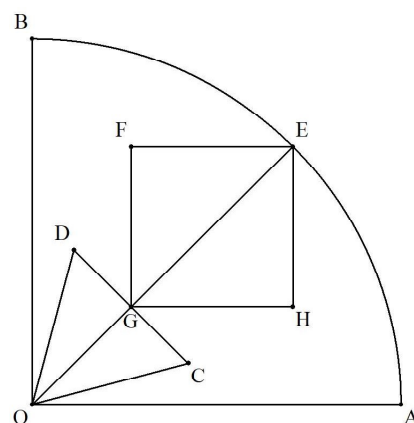


【解答】 1 辺の長さを a とおき、図のように記号を付ける。

$$OE = OG + GE = \frac{\sqrt{3}a}{2} + \sqrt{2}a = 1 \text{ より,}$$

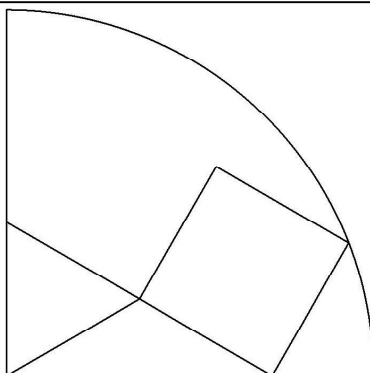
$$a = \frac{2}{2\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{2(2\sqrt{2} - \sqrt{3})}{5} \quad (\approx 0.438551)$$

よって、求める 1 辺の長さは、 $\frac{2(2\sqrt{2} - \sqrt{3})}{5}$ 答



追加問題 2

半径 1 の四分円内に、図のように
辺の長さが等しい正方形と正三角形
が配置されている。1 辺の長さを求
めよ。



【解答】 1 辺の長さを a とおき、図のように記号を付ける。

$\triangle FHO$ について、 $FO = a$ ， $\angle FOH = 30^\circ$ ， $\angle FHO = 90^\circ$ であるから、

$FH = \frac{a}{2}$ ， $OH = \frac{\sqrt{3}a}{2}$ である。また、 $\triangle FHO \cong \triangle FHC \cong \triangle CID$ である。

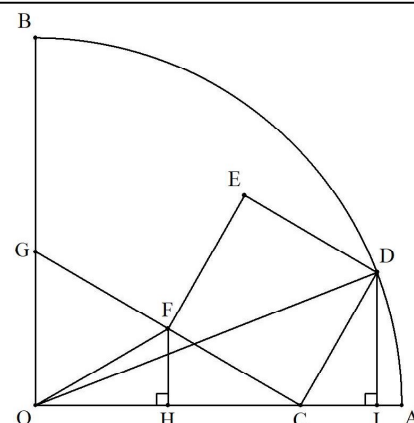
$\triangle DOI$ について、 $DO = 1$ ， $OI = OH + HC = CI = \frac{\sqrt{3}a}{2} + \frac{\sqrt{3}a}{2} + \frac{a}{2}$

$= \frac{1+3\sqrt{3}}{2}a$ ， $ID = \frac{\sqrt{3}a}{2}$ であるから、三平方の定理を適用すると、

$$\left(\frac{1+3\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2 = 1^2 \quad a^2 = \frac{4}{16+4\sqrt{3}} = \frac{4-\sqrt{3}}{13}$$

$a > 0$ より、 $a = \sqrt{\frac{4-\sqrt{3}}{13}} \quad (\approx 0.417681)$

よって、求める 1 辺の長さは、 $\sqrt{\frac{4-\sqrt{3}}{13}}$ 答



(2025/10/12 ジョーカー)