

設問1

左図のように、AからABに垂直に下した点をP'とします。そして、 $AP' = h'$ 、 $\triangle ABC$ の面積をSとすると、

$$S = \frac{ah'}{2} \Rightarrow h' = \frac{2S}{a}$$

です。また、 $BP' = p'$ とすると、 $\triangle ABP'$ の面積S'は、

$$S' = \frac{p'h'}{2} = \frac{p'S}{a} \Rightarrow \frac{S}{S'} = \frac{a}{p'}$$

です。ここで、 $\triangle ABP'$ と $\triangle QBP$ は相似なので、 $BP = p$ とすると、

$$\left(\frac{p}{p'}\right)^2 = \frac{S}{S'} \Rightarrow p = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{S}{S'}\right)^{\frac{1}{2}} p' = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{p'}\right)^{\frac{1}{2}} p' = \left(\frac{ap'}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

です。 $\triangle ABP'$ に三平方の定理を適用して、

$$AB^2 + BP'^2 = AP'^2 \Rightarrow BP'^2 = AP'^2 - AB^2 \Rightarrow p'^2 = h'^2 - c^2 = \left(\frac{2S}{a}\right)^2 - c^2$$

$$\Rightarrow p' = \frac{\sqrt{(ac)^2 - 4S^2}}{a}$$

となり、

$$p = \left(\frac{ap'}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{a \frac{\sqrt{(ac)^2 - 4S^2}}{a}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{(a^2c^2 - 4S^2)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}$$

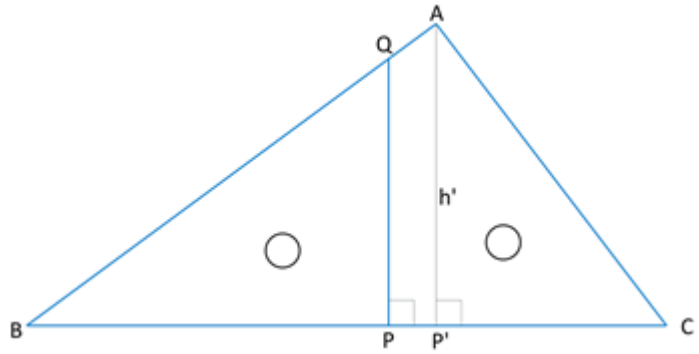
です。Sはヘロンの公式より、

$$S = \frac{\sqrt{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(a+b+c)}}{4}$$

なので、

$$\begin{aligned} p &= \frac{(a^2c^2 - 4S^2)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}} = \frac{\left(a^2c^2 - 4\left(\frac{\sqrt{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(a+b+c)}}{4}\right)^2\right)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{a^2 - b^2 + c^2}}{2} \end{aligned}$$

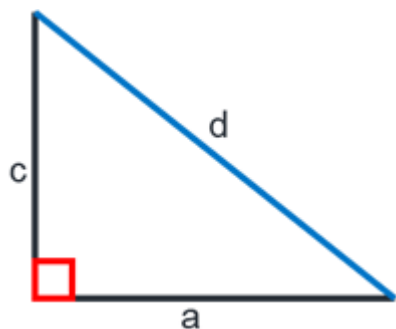
以上より、 $BP = \frac{\sqrt{a^2 - b^2 + c^2}}{2}$ です。



設問2 コンパスと定規を使って、直角を作る方法は既知とします。下記にアニメーションがありますので、参考にして下さい。

<https://kasama-nori.up.seesaa.net/image/PerpendicularBisector.gif>

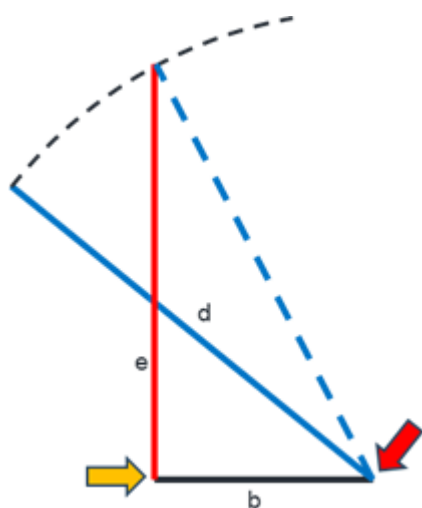
設問1で求めたBPの長さを、定規とコンパスで作図します。直角三角形を考えて、三平方の定理を複数回使います。



設問1のa、cを直角を挟む辺と考えて、直角三角形を描きます。すると、三平方の定理により、

$$a^2 + c^2 = d^2$$

となるdが得られます。



長さbの線分を水平に引き、上で作った長さdをコンパスに設定して、赤矢印を中心に弧を描きます。

次に、その弧に交わるように、オレンジ矢印から垂直に線分を引き、その長さをeとします。

すると、三平方の定理により、

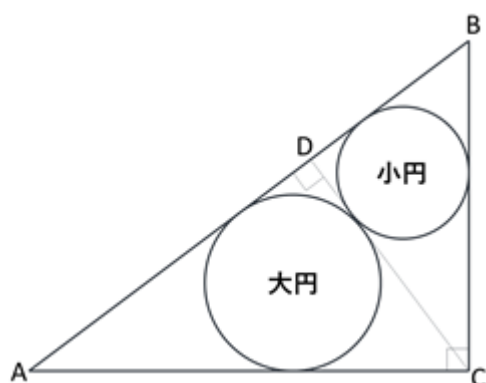
$$b^2 + e^2 = d^2 \Rightarrow e^2 = d^2 - b^2$$

$$\Rightarrow e^2 = a^2 - b^2 + c^2 \Rightarrow e = \sqrt{a^2 - b^2 + c^2}$$

となります。

よって、線分BPの長さはeを二等分すれば求まります。

別問題

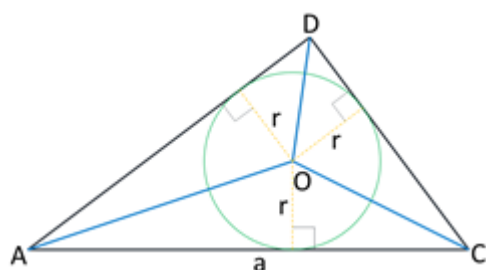


$\triangle ABC$ 、 $\triangle ACD$ 、 $\triangle CBD$ は相似です。

$\triangle ACD$ 、 $\triangle CBD$ の辺の比は、内接円の直径の比に等しいので、

$AC:CB = \text{大円の直径}:\text{小円の直径} = 32:24 = 4:3$ です。

すると、 $\triangle ABC$ は辺の比が3:4:5の典型的な直角三角形であることがわかります。 $\triangle ACD$ 、 $\triangle CBD$ は相似で、どちらも同じ性質を持っているので、 $\triangle ACD$ で考えます。



$AC = a$ とすると、

$$AD = \frac{4}{5}a, CD = \frac{3}{5}a$$

なので、 $\triangle ACD$ の面積 S は、

$$S = \frac{AD \cdot CD}{2} = \frac{\frac{4}{5}a \cdot \frac{3}{5}a}{2} = \frac{6}{25}a^2 \dots \textcircled{1}$$

一方、内接円の半径を r とすると、

$$S = \triangle OAC + \triangle OAD + \triangle OCD = \frac{AC}{2}r + \frac{AD}{2}r + \frac{CD}{2}r = \frac{a}{2}r + \frac{\frac{4}{5}a}{2}r + \frac{\frac{3}{5}a}{2}r = \frac{6}{5}ar \dots \textcircled{2}$$

です。①②を a について解くと、 $a = 0,5r$ ですが、 $a > 0$ なので、 $a = 5r$ が適切です。ここで、 r は大円の半径なので、 $r = \frac{32}{2} = 16$ ですから、

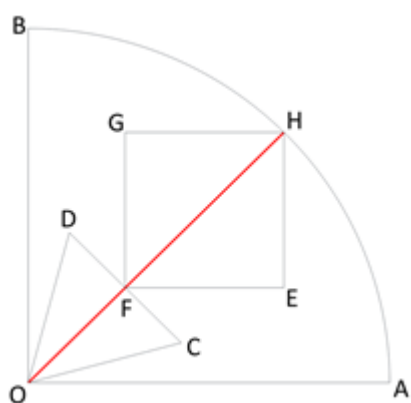
$$AC = 5r = 5 \cdot 16 = 80$$

です。すると、上述したように、 $\triangle ABC$ の辺の比が3:4:5なので、

$$BC = \frac{3}{4}AC = \frac{3}{4} \cdot 80 = 60, AB = \frac{5}{4}AC = \frac{5}{4} \cdot 80 = 100$$

となります。以上より、求める三角形の辺の長さは、60 尺、80 尺、100 尺です。

追加問題1



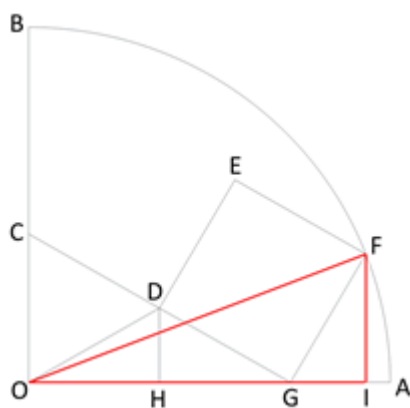
図のように、各点に記号を付けます。正方形と正三角形の一辺の長さを a とすると、

$$\begin{aligned} OF + FH = OH &\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}OC + \sqrt{2}EF = OH \\ &\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}a + \sqrt{2}a = 1 \Rightarrow a = \frac{2(2\sqrt{2} - \sqrt{3})}{5} \end{aligned}$$

です。

よって、一辺の長さは $\frac{2(2\sqrt{2}-\sqrt{3})}{5} = 0.43855 \dots$ です。

追加問題2



図のように、各点に記号を付けます。ただし、 H は D から OA に垂直に下した点、 I は F から OA に垂直に下した点とします。正方形と正三角形の一辺の長さを a とし、 $\triangle OFI$ に三平方の定理を適用すると、

$$OI^2 + IF^2 = OF^2$$

$$\Rightarrow (OH + HG + GI)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}GF\right)^2 = OF^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}OD + \frac{\sqrt{3}}{2}DG + \frac{1}{2}GF\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}GF\right)^2 = OG^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 = 1^2 \Rightarrow a = \pm \frac{\sqrt{4-\sqrt{3}}}{\sqrt{13}}$$

です。ここで、 $a > 0$ なので、一辺の長さは $\frac{\sqrt{4-\sqrt{3}}}{\sqrt{13}} = 0.417681 \dots$ です。