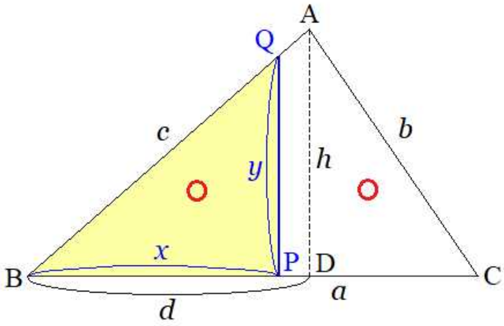
● 問題 460 解答＜三角定規＞



［設問１］右図のように各点および諸量を定める。

△ABC の面積を S とすると，$S=\dfrac{1}{2}ah$ より　$h=\dfrac{2S}{a}$

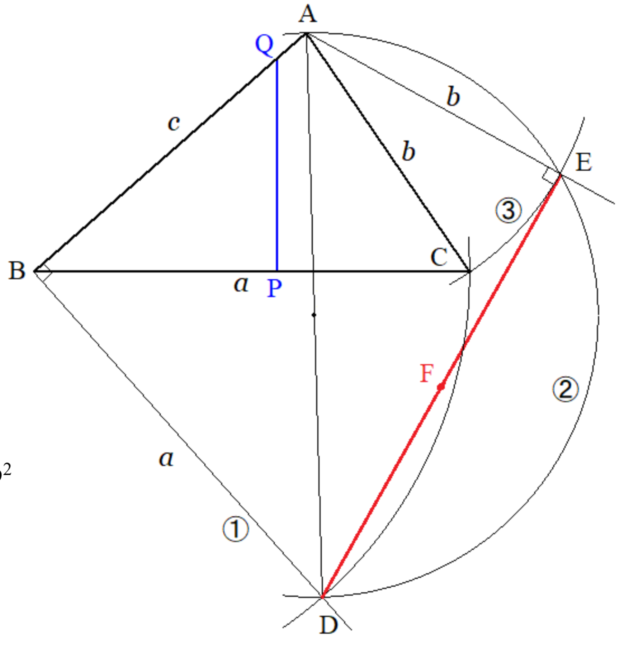
余弦定理より　$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$，$d=c\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2a}$

△QBP ∽ △ABD より，$y=\dfrac{h}{d}x$

これらより，$\dfrac{1}{2}S=\dfrac{1}{2}xy=\dfrac{h}{2d}x^2=\dfrac{1}{2d}\cdot\dfrac{2S}{a}x^2$

∴ $x^2=\dfrac{ad}{2}=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{4}$　∴ $x=\mathrm{BP}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+c^2-b^2}}$　…[答]

［設問２］**P 点の作図**



BP の長さをコンパスで計り取ることを考える。

＜手順＞

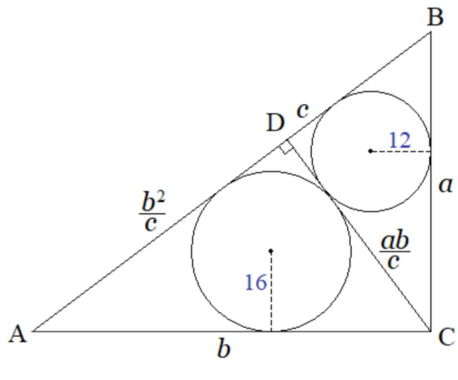
(1) B 点を通る辺 AB の垂線①を作図する。

(2) ①上に BD ＝ a となる点 D をとる。
　このとき，$\mathrm{AD}^2=a^2+c^2$

(3) AD を直径の両端とする円弧②を作図する。

(4) A を中心とし半径 b の円弧③を作図し，円弧②との交点を E とする。
　このとき AE⊥DE で，$\mathrm{DE}^2=\mathrm{AD}^2-b^2=a^2+c^2-b^2$

(5) DE の中点を F とし, EF をコンパスで計り取る。
$$\mathrm{EF}=\frac{1}{2}\mathrm{ED}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+c^2-b^2}=\mathrm{BP}$$
　この長さを B 点から BC 上に取り, P 点とする。



［別問題］△ ABC の 3 辺を図のように a, b, c とすると，

△ABC ∽ △ACD ∽ △CBD より，$\mathrm{AD}=\dfrac{b^2}{c}$，$\mathrm{CD}=\dfrac{ab}{c}$。

△ACD の面積より，$\dfrac{1}{2}\cdot16\cdot\left(b+\dfrac{ab}{c}+\dfrac{b^2}{c}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{b^2}{c}\cdot\dfrac{ab}{c}$

∴ $16c(a+b+c)=ab^2$ …①

また，△ACD と △CBD の相似比は内接する 2 円の半径の比に等しいから，$a:b=3:4$ で，このとき $a:b:c=3:4:5$

よって，$a=3k$，$b=4k$，$c=5k$ を①に代入し，

$16\cdot5k(3k+4k+5k)=3k\cdot4k\cdot4k$　∴ $k=20$

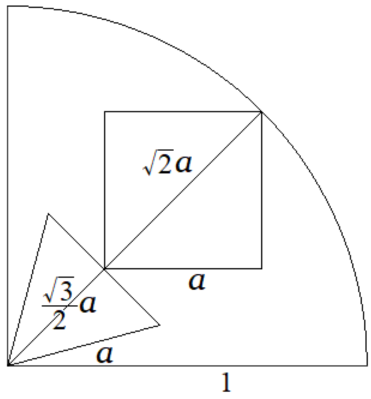
以上より，求める 3 辺は，AB＝**100尺**，BC＝**60尺**，CA＝**80尺**　…[答]

《追加問題》

［問題１］ 求める長さを a とすると, 右図のようになるから

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{2}\right)a=1 \quad \therefore\ a=\frac{2}{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}=\frac{\mathbf{2(2\sqrt{2}-\sqrt{3})}}{\mathbf{5}} \quad \cdots[答]$$

$(=0.438\cdots)$



［問題２］ 求める長さを a とすると, 右図のようになるから

余弦定理より

$$a^2+(\sqrt{2}\,a)^2-2a\cdot\sqrt{2}\,a\cdot\cos165^\circ\ =1^2$$

$$\therefore\ \left(1+2+2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)a^2=(4+\sqrt{3})a^2=1$$

$$\therefore\ a^2=\frac{1}{4+\sqrt{3}}=\frac{4-\sqrt{3}}{13}$$

$$\therefore\ a=\sqrt{\frac{\mathbf{4-\sqrt{3}}}{\mathbf{13}}}=\frac{\sqrt{\mathbf{52-13\sqrt{3}}}}{\mathbf{13}} \quad (=0.417\cdots) \quad \cdots[答]$$