● 問題 461 解答＜三角定規＞

[問題] (1) $a_1=1,\ \dfrac{2^n}{n!}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}a_ka_{n+2-k}$

1° $n=1$ のとき　$2=\displaystyle\sum_{k=1}^{2}a_ka_{3-k}=a_1a_2+a_2a_1=2a_1a_2$

$\therefore\ a_1a_2=1\quad\therefore\ a_2=1$

2° $n=2$ のとき　$\dfrac{2^2}{2}=\displaystyle\sum_{k=1}^{3}a_ka_{4-k}=a_1a_3+a_2a_2+a_3a_1$

$\therefore\ 2=2a_3+1\quad\therefore\ a_3=\dfrac{1}{2}$

3° $n=3$ のとき　$\dfrac{2^3}{3\cdot2}=\displaystyle\sum_{k=1}^{4}a_ka_{5-k}=a_1a_4+a_2a_3+a_3a_2+a_4a_1$

$\therefore\ \dfrac{4}{3}=2(a_4+a_2a_3)\quad\therefore\ a_4=\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3\cdot2}$

4° $n=4$ のとき　$\dfrac{2^4}{4\cdot3\cdot2}=\displaystyle\sum_{k=1}^{5}a_ka_{6-k}=a_1a_5+a_2a_4+a_3a_3+a_4a_2+a_5a_1$

$\therefore\ \dfrac{2}{3}=2\left(a_5+\dfrac{1}{6}\right)+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\quad\therefore\ a_5=\dfrac{1}{24}=\dfrac{1}{4\cdot3\cdot2}$

以上より，$0!=1$ として，$a_n=\dfrac{1}{(n-1)!}$ …① と類推し，これを帰納法で示す。

［Ⅰ］上記より, $n=1,\ 2$ で①は成り立つ。

［Ⅱ］$n=m$ での成立, すなわち次式②の成立を仮定する。

$$2^m=\sum_{k=1}^{m+1}\frac{m!}{(k-1)!\cdot(m+1-k)!}=m!\left(\frac{1}{0!m!}+\frac{1}{1!(m-1)!}+\cdots+\frac{1}{m!0!}\right)=\sum_{k=0}^{m}{}_m\mathrm{C}_k\ \cdots②$$

［Ⅲ］$n=m+1$ のとき

$$②\text{の右辺}=\sum_{k=0}^{m+1}{}_{m+1}\mathrm{C}_k={}_{m+1}\mathrm{C}_0+\sum_{k=1}^{m}{}_{m+1}\mathrm{C}_k+{}_{m+1}\mathrm{C}_{m+1}$$

$$={}_m\mathrm{C}_0+\sum_{k=1}^{m}({}_m\mathrm{C}_{k-1}+{}_m\mathrm{C}_k)+{}_m\mathrm{C}_m$$

$$=2\left(\sum_{k=0}^{m}{}_m\mathrm{C}_k\right)=2\cdot2^m=2^{m+1}\quad(\because\ ②)$$

よって, ②は $n=m+1$ でも成立し帰納法は完結, ②はすべての自然数で成立する。［証了］

以上より，求める一般項は　$a_n=\boldsymbol{\dfrac{1}{(n-1)!}}$　…[答]

(2) $a_1=\dfrac{1}{2}$, $\sqrt{2}\,a_{n+1}=\sqrt{a_n+1}$ $\quad\therefore\ a_{n+1}=\sqrt{\dfrac{a_n+1}{2}}$

$$a_2=\sqrt{\frac{a_1+1}{2}}=\sqrt{\frac{1/2+1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6},\ a_3=\sqrt{\frac{\sqrt{3}\,/2+1}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\cos\frac{\pi}{12}$$

これらから $a_n=\cos\left(\dfrac{\pi}{3\cdot2^{n-1}}\right)$ …① と類推し，これを帰納法で示す。

［Ⅰ］$n=1$ のとき $a_1=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$ で，①は成り立つ。

［Ⅱ］$n=k$ での成立，すなわち $a_k=\cos\left(\dfrac{\pi}{3\cdot2^{k-1}}\right)$ …② を仮定する。

②のとき半角の公式より $\sqrt{\dfrac{1}{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3\cdot2^{k-1}}\right)+1\right)}=\cos\left(\dfrac{\pi}{3\cdot2^{k}}\right)=a_{k+1}$ …③

［Ⅲ］③は②が $n=k+1$ のときの成立を示し，帰納法は完結した。

以上より，求める一般項は $\boldsymbol{a_n=\cos\left(\dfrac{\pi}{3\cdot2^{n-1}}\right)}$ …[答]

[冠稲荷寺社算額]

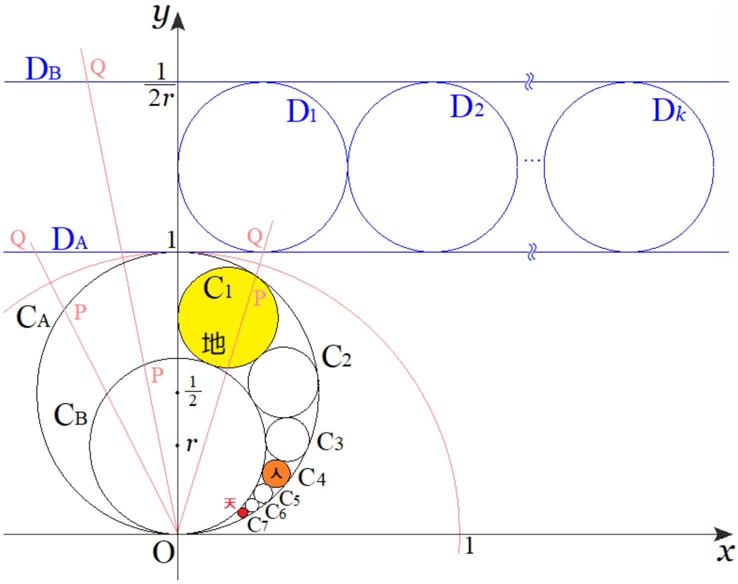
図のように座標軸・座標, 各曲線, 各点を定める。反転法を用いて考える。

図の曲線 C 上の点 P に対し,

3 点 O, P, Q が同方向に一直線上にあり，

OP・OQ＝1 …(#)

を満たすよう変換した点を Q とする。



P$(x,\ y)$, Q$(X,\ Y)$ とすると, (#) より

$$x=\frac{X}{X^2+Y^2},\ y=\frac{Y}{X^2+Y^2}\quad \cdots①$$

$$X=\frac{x}{x^2+y^2},\ Y=\frac{y}{x^2+y^2}\quad \cdots①'$$

円 C_A の半径を $\frac{1}{2}$, C_B の半径を r とすると，

$$C_A\ :\ x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\quad \cdots②$$

$$C_B\ :\ x^2+(y-r)^2=r^2\quad \cdots③$$

②に①を代入し，$\dfrac{X^2}{(X^2+Y^2)^2}+\dfrac{Y^2}{(X^2+Y^2)^2}-\dfrac{Y}{X^2+Y^2}=0\quad \therefore\ (X^2+Y^2)(1-Y)=0\quad \therefore\ Y=1$

よって，変換①によって，円 C_A は直線 D_A：$Y=1$ に移る。

同様に，①により 円 C_B は直線 D_B：$Y=\dfrac{1}{2r}$ に移る。

変換①により, 明らかに, 曲線の接点は接点に移されるので, C_A, C_B に, さらに互いに内・外接する円群 C_1 ～ C_7 は①により図の円 D_1 ～のように移される。

円 D_1 ～の半径はすべて $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2r}-1\right)$ だから

$$円\ D_k\ :\ \left\{X-(2k-1)\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2r}-1\right)\right\}^2+\left\{Y-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2r}+1\right)\right\}^2=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2r}-1\right)^2\quad (k=1,\ \cdots,\ 7)\quad \cdots④$$

円 $(X-a)^2+(Y-b)^2=t^2$ は逆変換①$'$により

$$円\ \left(x+\frac{a}{c}\right)^2+\left(y+\frac{b}{c}\right)^2=u_k{}^2=\left(\frac{t}{c}\right)^2$$

$$c=t^2-a^2-b^2$$

に移るから（計算過程省略), これを④に当てはめる。

$$a_k=(2k-1)\left(\frac{1}{4r}-\frac{1}{2}\right)=\frac{(2k-1)(1-2r)}{4r}$$

$$b_k=\frac{1}{4r}+\frac{1}{2}=\frac{1+2r}{4r}$$

$$t_k=\frac{1}{4r}-\frac{1}{2}=\frac{1-2r}{4r}$$

$$c_k=t_k{}^2-a_k{}^2-b_k{}^2=\frac{(1-2r)^2}{(4r)^2}\{1-(2k-1)^2\}-\frac{(1+2r)^2}{(4r)^2}$$

$=\dfrac{1}{(4r)^2}\{(1-2r)^2-(4k-4k^{2)})-(1+2r)^2\}$

$u_k=\left|\dfrac{t_k}{c_k}\right|=\dfrac{4r(1-2r)}{(1-2r)^2(4k^2-4k)+(1+2r)^2}$

地円 C_1 の半径 $u_1=\dfrac{4r(1-2r)}{(1+2r)^2}$

天円 C_7 の半径 $u_7=\dfrac{4r(1-2r)}{168(1-2r)^2+(1+2r)^2}$

$u_1=10u_7$ より， $168(1-2r)^2+(1+2r)^2=10(1+2r)^2$

$\therefore\ 168(1-2r)^2=9(1+2r)^2$ …⑤

人円 C_4 の半径 $u_4=\dfrac{4r(1-2r)}{48(1-2r)^2+(1+2r)^2}$

$\dfrac{u_1}{u_4}=\dfrac{1}{(1+2r)^2}\cdot\{48(1-r)^2+(1+2r)^2=48\cdot\dfrac{(1-2r)^2}{(1+2r)^2}+1=48\cdot\dfrac{9}{168}+1=\dfrac{25}{7}$ （∵ ⑤）

以上より，求める人円の直径は $\dfrac{7}{25}\cdot 10=\dfrac{14}{5}=$**2.8 寸** …[答]

※ 求められてはいませんが，以上の解答過程から C_k の**半径**は $u_k=\dfrac{14}{3k(k-1)+14}u_1$ で，

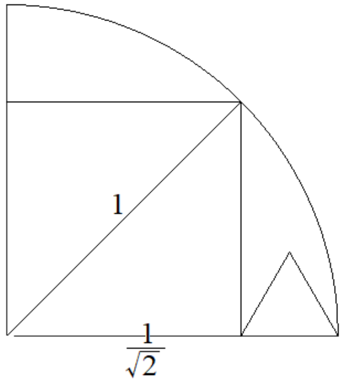
$u_2=\dfrac{35}{10}$, $u_3=\dfrac{35}{16}$, $u_4=\dfrac{35}{25}$, $u_5=\dfrac{35}{37}$, $u_6=\dfrac{35}{52}$, $u_7=\dfrac{35}{70}$ (寸)

となるようです。

また，⑤より $r=\dfrac{59-4\sqrt{42}}{106}$ $(=0.3120\cdots)$ (寸) です。

《追加問題》

［問題１］　右図のようになるから,

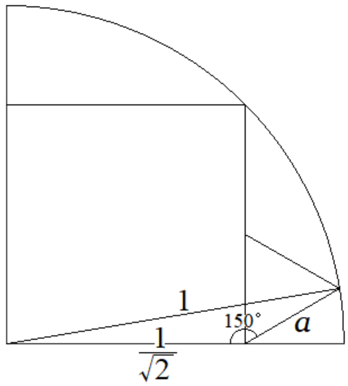


正方形の１辺　$=\dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}=\dfrac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}$　$(=0.707\cdots)$

正三角形の１辺$=\mathbf{1}-\dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}=\dfrac{\mathbf{2}-\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}$　$(=0.292\cdots)$

…［答］

［問題２］　右図のようになるから, 正三角形の１辺を a とすると,



余弦定理より　$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+a^2-2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot a\cos 150^\circ=1^2$

整理して　$2a^2+\sqrt{6}\,a-1=0$

$a>0$ でこれを解いて $a=\dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{6}}{4}$

以上より

正方形の１辺　$=\dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}=\dfrac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}$　$(=0.707\cdots)$

正三角形の１辺$=\dfrac{\sqrt{\mathbf{14}}-\sqrt{\mathbf{6}}}{\mathbf{4}}$　$(=0.323\cdots)$

…［答］