

第 462 回

問題

文字はすべて正の数とする。

$$x^2 + y^2 + xy = 49, \quad y^2 + yz + z^2 = 64, \quad z^2 + zx + x^2 = 25$$

x, y, z が上の 3 式を満たすとき, $x + y + z$ の値を求めよ。

解答 $x > 0, y > 0, z > 0$ で,

$$x^2 + y^2 + xy = 49 \quad \dots \textcircled{1}, \quad y^2 + yz + z^2 = 64 \quad \dots \textcircled{2}, \quad z^2 + zx + x^2 = 25 \quad \dots \textcircled{3}, \quad x + y + z = k \quad \dots \textcircled{4}$$

とおく。

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ より, } (x - z)(x + y + z) = -15 \quad \therefore x = z - \frac{15}{k} \quad \dots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{3} \text{ より, } (y - z)(x + y + z) = 24 \quad \therefore y = z + \frac{24}{k} \quad \dots \textcircled{6}$$

$$\textcircled{5}, \textcircled{6} \text{ を } \textcircled{4} \text{ に代入すると, } \left(z - \frac{15}{k}\right) + \left(z + \frac{24}{k}\right) + z = k \quad \therefore z = \frac{k}{3} - \frac{3}{k} \quad \dots \textcircled{7}$$

$$\textcircled{7} \text{ を } \textcircled{5} \text{ に代入して, } x = \frac{k}{3} - \frac{18}{k} \quad \dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{8}, \textcircled{7} \text{ を } \textcircled{3} \text{ に代入すると, } \left(\frac{k}{3} - \frac{3}{k}\right)^2 + \left(\frac{k}{3} - \frac{3}{k}\right)\left(\frac{k}{3} - \frac{18}{k}\right) + \left(\frac{k}{3} - \frac{18}{k}\right)^2 = 25$$

分母を払って整理すると, $k^4 - 138k^2 + 1161 = 0$

因数分解すると, $(k + 3)(k - 3)(k^2 - 129) = 0$

$k > 0$ より, $k = 3, \sqrt{129}$

$k = 3$ のとき, $\textcircled{7}$ より, $z = 0$ となるから, 不適。

よって, $k = x + y + z = \sqrt{129}$ 答

$$\text{補足} \quad x = \frac{25}{\sqrt{129}}, \quad y = \frac{64}{\sqrt{129}}, \quad z = \frac{40}{\sqrt{129}}$$

参考 フェルマー点について

$\triangle ABC$ の外側に 3 点 A', B', C' を $\triangle A'CB, \triangle B'AC, \triangle C'BA$ が正三角形になるようにとる。

このとき,

(1) AA', BB', CC' は 1 点 F で交わる。点 F をフェルマー点という。

(2) $\angle AFB = \angle BFC = \angle CFA$

(3) $AA' = BB' = CC'$

(4) $AF + BF + CF = AA'$

証明

(1) $\triangle A'CB$, $\triangle B'AC$ の外接円の C 以外の交点を F とすれば,
 $\angle BFA' = \angle A'FC = 60^\circ$, $\angle AFB' = \angle B'FC = 60^\circ$ であるから,
 3点 A, F, A' および B, F, B' は一直線上にある。

次に, $\angle BFA' = 60^\circ$ であるから, $\triangle CBA$ の外接円も F を通り,
 3点 C, F, C' も一直線上にある。

(2) (1) より,

$$\angle BFA' = \angle A'FC = 60^\circ \text{ より, } \angle BFC = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ,$$

$$\angle AFB' = \angle B'FC = 60^\circ \text{ より, } \angle CFA = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ,$$

$$\angle AFB = 360^\circ - (\angle BFC + \angle CFA) = 360^\circ - (120^\circ + 120^\circ) = 120^\circ$$

よって, $\angle AFB = \angle BFC = \angle CFA = 120^\circ$

(3) $\triangle AA'C \equiv \triangle B'BC$ ($\because$ 二辺夾角相等) であるから, $AA' = B'B \dots \textcircled{1}$

同様に, $\triangle ABB' \equiv \triangle ACC'$ であるから, $B'B = CC' \dots \textcircled{2}$

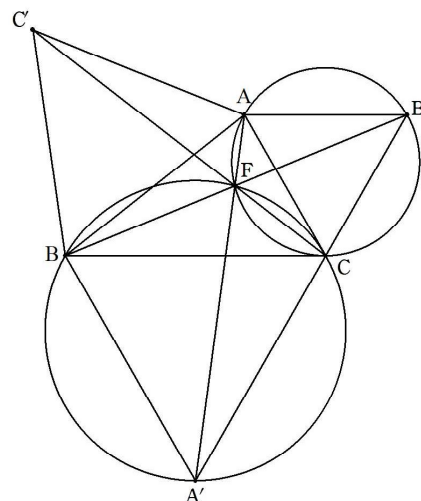
$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ より, $AA' = BB' = CC' \dots \textcircled{3}$

(4) $\angle BA'C + \angle CFB = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$ より, 四角形 $FBA'C$ は円に内接する。

トレミーの定理により, $BF \cdot A'C + CF \cdot A'B = FA' \cdot BC \dots \textcircled{4}$

$\triangle A'CB$ は正三角形であるから, $A'C = A'B = BC$ より, $\textcircled{4}$ は, $BF + CF = FA'$ となる。

この両辺に AF を加えると $AF + BF + CF = AF + FA' = AA'$ 終



補題 鋭角三角形 ABC において, $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, 面積を S とする。 $\triangle ABC$ の内部に点 P をとり, $AP + BP + CP$ を最小にする点 P とする。このときの $AP + BP + CP$ の値を a, b, c, S で表せ。

解答 $\triangle ABC$ 内に $\angle AFB = \angle BFC = \angle CFA (=120^\circ)$ となる点 F (フェルマー点) をとると,
 $P = F$ において, $AP + BP + CP$ は最小となる。

証明 D, F', P' を $\triangle BCD$, $\triangle CFF'$, $\triangle CPP'$ が正三角形になるようにとると,

$$AP + BP + CP = AP + P'D + PP' = AP + PP' + P'D \geq AD$$

また, $AD = AF + FF' + F'D = AF + CF + BF = AF + BF + CF$ であるから,

$$AP + BP + CP \geq AF + BF + CF \text{ (等号は, } P = F \text{ のとき) } \textcircled{1}$$

$$\text{次に, } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}, \sin C = \frac{2S}{ab} \text{ であるから,}$$

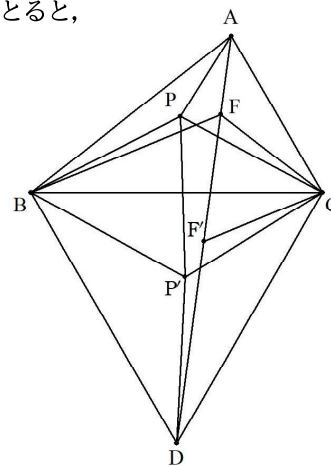
$\triangle CAD$ に余弦定理を適用すると,

$$AD^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(C + 60^\circ) = a^2 + b^2 - 2ab(\cos C \cos 60^\circ - \sin C \sin 60^\circ)$$

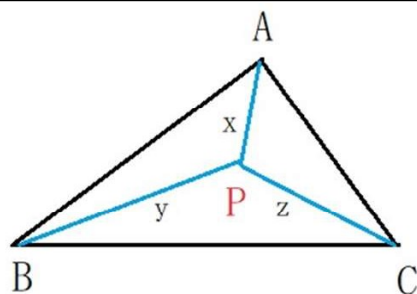
$$= a^2 + b^2 - 2ab \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \cdot \frac{1}{2} - \frac{2S}{ab} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S}{2}$$

$$AD > 0 \text{ より, } AD = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S}{2}}$$

$$\text{よって, } AP + BP + CP \text{ の最小値は, } \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S}{2}} \textcircled{2}$$



*参考図 点Pをフェルマー点という。
ただし、 $\triangle ABC$ は鋭角三角形のときの図



別解 $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ で, $x^2 + y^2 + xy = 49$...①,

$y^2 + yz + z^2 = 64$...②, $z^2 + zx + x^2 = 25$...③

点Pがフェルマー点のとき, $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120^\circ$

$\triangle PAB$ に余弦定理を適用すると,

$$AB^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 120^\circ = x^2 + y^2 + xy = 49 \quad (\because \text{①})$$

$AB > 0$ より, $AB = 7$

同様に, $\triangle PBC$, $\triangle PCA$ に余弦定理を適用して, ②, ③から

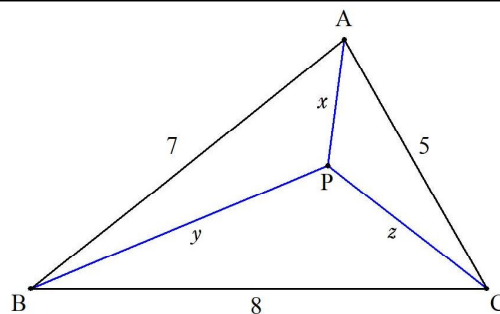
$BC = 8$, $CA = 5$ が得られる。

$$a = 8, \quad b = 5, \quad c = 7 \text{ であるから, } s = \frac{a+b+c}{2} = 10$$

$$\text{ヘロンの公式により, } S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{10 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3} = 10\sqrt{3}$$

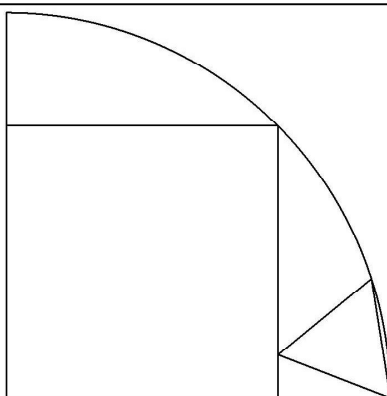
よって, 補題により,

$$x + y + z = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S}{2}} = \sqrt{\frac{8^2 + 5^2 + 7^2 + 4\sqrt{3} \cdot 10\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{129} \quad \text{答}$$



追加問題 1

半径 1 の四分円内に、図のように正方形と正三角形が配置されている。
それぞれの 1 辺の長さを求めよ。



解答 正方形と正三角形の 1 辺の長さをそれぞれ a , b とおき、
図のように記号を付ける。

$\triangle DOC$ は $DO = 1$ である直角二等辺三角形であるから、 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (≈ 0.707107)

ここから、与えられた図形を座標平面の第 1 象限において考える。

$O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(0, 1)$ である。

A を中心、半径 b の円の方程式は、 $(x-1)^2 + y^2 = b^2$...①

四分円の方程式は、 $x^2 + y^2 = 1$...②, $x \geq 0$, $y \geq 0$

①を展開し、②を代入すると、 $1 - 2x + 1 = b^2$

$$x = \frac{2 - b^2}{2}$$

これを②に代入すると、 $\left(\frac{2 - b^2}{2}\right)^2 + y^2 = 1$ $\therefore y = \frac{b\sqrt{4 - b^2}}{2}$ $\therefore F\left(\frac{2 - b^2}{2}, \frac{b\sqrt{4 - b^2}}{2}\right)$

ここから、与えられた図形を複素数平面において考える。

$O(0)$, $A(1)$, $B(i)$ で、 $F(f)$, $G(g)$ とおくと、 $f = \frac{2 - b^2}{2} + \frac{b\sqrt{4 - b^2}}{2}i$ である。

G は F を A 中心に 60° だけ回転させた点であるから、 $g - 1 = (f - 1)(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = (f - 1)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$$g = 1 + \left(\frac{2 - b^2}{2} + \frac{b\sqrt{4 - b^2}}{2}i - 1\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{4 - b^2 - \sqrt{3}b\sqrt{4 - b^2}}{4} - \frac{-\sqrt{3}b^2 + b\sqrt{4 - b^2}}{4}i$$

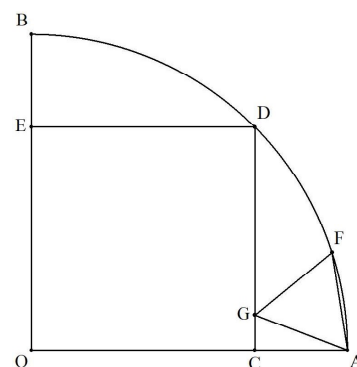
G は CD 上の点より、 g の実部は $\frac{\sqrt{2}}{2}$ であるから、 $\frac{4 - b^2 - \sqrt{3}b\sqrt{4 - b^2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\text{整理すると、} 4 - 2\sqrt{2} - b^2 = \sqrt{3}b\sqrt{4 - b^2}$$

$$\text{両辺を 2 乗すると、} b^4 - (5 - \sqrt{2})b^2 + 6 - 4\sqrt{2} = 0 \quad \therefore b^2 = \frac{5 - \sqrt{2} \pm \sqrt{3 + 6\sqrt{2}}}{2}$$

$$b^2 < 1 \text{ より、} b^2 = \frac{5 - \sqrt{2} - \sqrt{3 + 6\sqrt{2}}}{2} \quad b > 0 \text{ より、} b = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{2} - \sqrt{3 + 6\sqrt{2}}}{2}} \quad (\approx 0.313682)$$

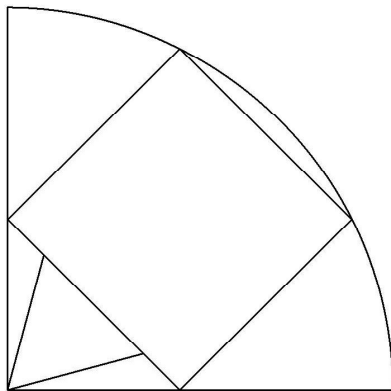
よって、求める 1 辺の長さは、正方形： $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 正三角形： $\sqrt{\frac{5 - \sqrt{2} - \sqrt{3 + 6\sqrt{2}}}{2}}$ 図



追加問題 2

半径 1 の四分円内に、図のように正方形と正三角形が配置されている。

それぞれの 1 辺の長さを求めよ。



【解答】 正方形と正三角形の 1 辺の長さをそれぞれ a , b とおき、
図のように記号を付ける。

$\triangle FOC$, $\triangle CID$ は合同な直角二等辺三角形であるから、 $OC=CI=ID=\frac{a}{\sqrt{2}}$

$\triangle DOI$ について、 $OI=OC+CI=\frac{a}{\sqrt{2}}+\frac{a}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}a$, $ID=\frac{a}{\sqrt{2}}$, $DO=1$

であるから、三平方の定理により、 $(\sqrt{2}a)^2+\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2=1$ $a^2=\frac{2}{5}$

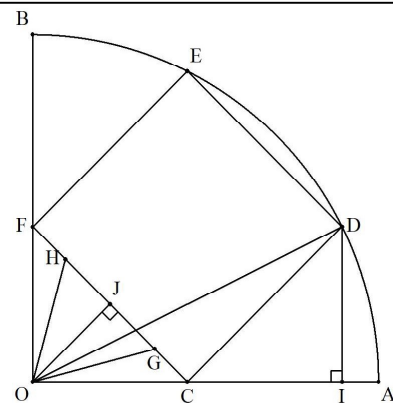
$a>0$ より、 $a=\sqrt{\frac{2}{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$ (≈ 0.632456)

次に、 $\triangle OGJ$ について、 $\angle HOJ=30^\circ$ であるから、 $OJ=\frac{\sqrt{3}b}{2}$...①

$\triangle OCJ$ は直角二等辺三角形であるから、 $OJ=CJ=\frac{a}{2}$...②

②, ①より、 $\frac{\sqrt{3}b}{2}=\frac{a}{2}$ $\therefore b=\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{\frac{\sqrt{10}}{5}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{30}}{15}$ (≈ 0.365148)

よって、求める 1 辺の長さは、正方形： $\frac{\sqrt{10}}{5}$, 正三角形： $\frac{\sqrt{30}}{15}$ 図



(2025/12/7 ジョーカー)