補題 いろんなやり方はあると思いますが、点B、Cを焦点と見立てて、楕円の性質を使うのが簡単だと思います。楕円の定義は、

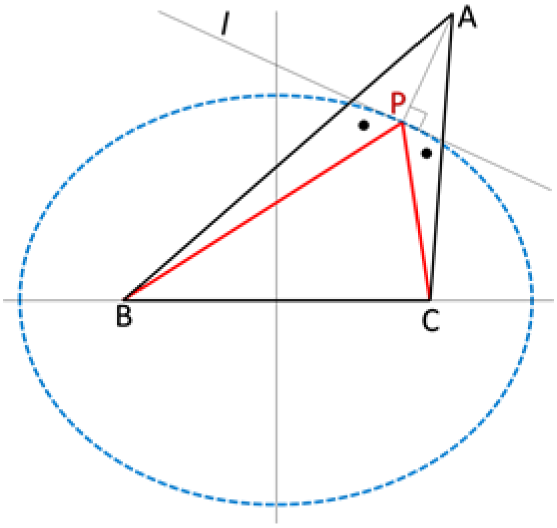
- 2つの焦点からの距離の和が一定である点の軌跡

ですが、次の有名な『楕円の反射定理』があります。

- 楕円の鏡の内側にある一方の焦点から出た光は、楕円周上で反射してもう一方の焦点に集まります。このとき、入射角と反射角は等しくなります。

証明は割愛しますが、2023年9月24日の『私の一日』の中で説明がありますので、そちらを参照して下さい。

名医は出血させずに手術する(https://ryugen3.sakura.ne.jp/toukou3/huusenn.PDF)



上述したように、楕円の軌跡は、焦点B、Cからの距離の和が一定となる点ですから、左図の青色の破線上を$BP + CP =$ 一定を保ちながら動きます。
すると、$AP + BP + CP$が最小になるのは、APと接線lが直交するときです。
ここで、楕円の反射定理により、

BPとlがなす角 = CPとlがなす角

ですから、$\angle APB = \angle APC$です。
また、焦点をA、Bとしたときも、同じことが言えて、$\angle CPA = \angle CPB$です。焦点をC、Aとしたときも、同様に、$\angle BPC = \angle BPA$です。よって、$\angle APB = \angle APC = \angle BPC = 120°$のとき、$AP + BP + CP$が最小となります。

⊿APBの面積をS_1、⊿BPCの面積をS_2、⊿CPAの面積をS_3とすると、

$$S_1 = \frac{xy\sin 120°}{2} = \frac{\sqrt{3}xy}{4}$$

$$S_2 = \frac{yx\sin 120°}{2} = \frac{\sqrt{3}yz}{4}$$

$$S_3 = \frac{zx\sin 120°}{2} = \frac{\sqrt{3}zx}{4}$$

なので、

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{\sqrt{3}xy}{4} + \frac{\sqrt{3}yz}{4} + \frac{\sqrt{3}zx}{4} \Rightarrow xy + yz + zx = \frac{\sqrt{3}}{4}(xy + yz + zx)$$

$$\Rightarrow xy + yz + zx = \frac{4}{\sqrt{3}}S$$

です。

また、⊿BPC、⊿CPA、⊿APBに余弦定理を適用して、

$$a^2=y^2+z^2-2yz\cos 120^\circ=y^2+z^2+yz$$
$$b^2=z^2+x^2-2zx\cos 120^\circ=z^2+x^2+zx$$
$$c^2=x^2+y^2-2xy\cos 120^\circ=x^2+y^2+xy$$

です。これらを足すと、

$$a^2+b^2+c^2=2(x^2+y^2+z^2)+(xy+yz+zx)=2(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)$$
$$\Rightarrow (x+y+z)^2=\frac{a^2+b^2+c^2+3(xy+yz+zx)}{2}$$

ここで、$xy+yz+zx=\frac{4}{\sqrt{3}}S$なので、

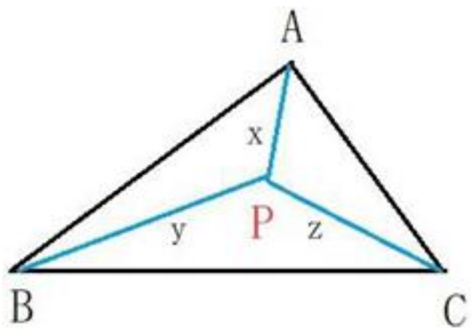
$$(x+y+z)^2=\frac{a^2+b^2+c^2+3\frac{4}{\sqrt{3}}S}{2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+2\sqrt{3}S$$

ですが、$x+y+z>0$なので、

$$x+y+z=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+2\sqrt{3}S}$$

が適切です。以上より、$AP+BP+CP$が最小値は、$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+2\sqrt{3}S}$です。

問題



補題の結果を踏まえて、与式を変形すると、

$$x^2+y^2+xy=49\Rightarrow x^2+y^2-2xy\cos 120^\circ=7^2$$
$$y^2+z^2+yz=64\Rightarrow y^2+z^2-2yz\cos 120^\circ=8^2$$
$$z^2+x^2+zx=25\Rightarrow x^2+y^2-2xy\cos 120^\circ=5^2$$

なので、左図において、フェルマー点Pの位置を示していることがわかります。

また、面積Sはヘロンの公式より、

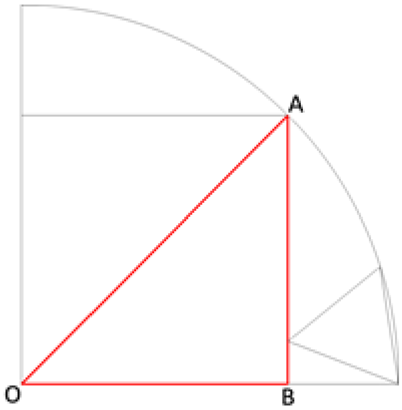
$$s=\frac{a+b+c}{2}=\frac{7+8+5}{2}=10$$
$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-b)}=\sqrt{10(10-7)(10-8)(10-5)}=10\sqrt{3}$$

なので、

$$x+y+z=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+2\sqrt{3}S}=\sqrt{\frac{7^2+8^2+5^2}{2}+2\sqrt{3}\cdot 10\sqrt{3}}=\sqrt{129}$$

です。

追加問題1



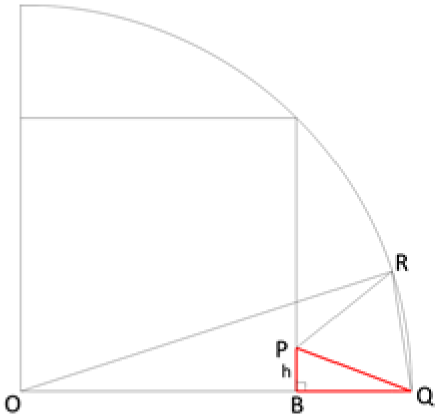
・正方形について

図のように、各点に記号を付け、正方形の一辺の長さをaとします。

⊿OABに三平方の定理を適用すると、

$$OB^2 + AB^2 = OA^2 \Rightarrow a^2 + a^2 = 1^2 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

です。



・正三角形について

図のように、各点に記号を付け、正三角形の一辺の長さbとします。

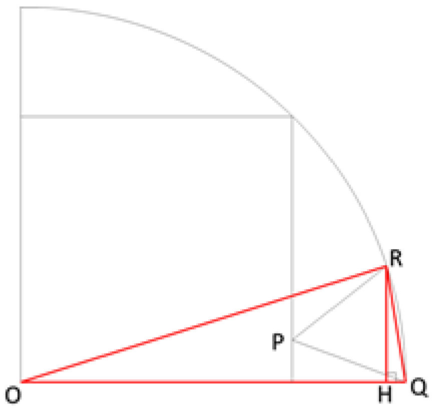
BP = hとして、⊿BPQに三平方の定理を適用すると、

$$BP^2 + BQ^2 = PQ^2 \Rightarrow (1 - OB)^2 + BQ^2 = PQ^2$$

$$\Rightarrow (1 - a)^2 + h^2 = b^2 \Rightarrow h = \sqrt{b^2 - (1 - a)^2}$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{b^2 - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

となります。



次に、OH = x、HR = yとして、⊿OHR、⊿QHRに三平方の定理を適用すると、

$$OH^2 + HR^2 = OR^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1^2$$

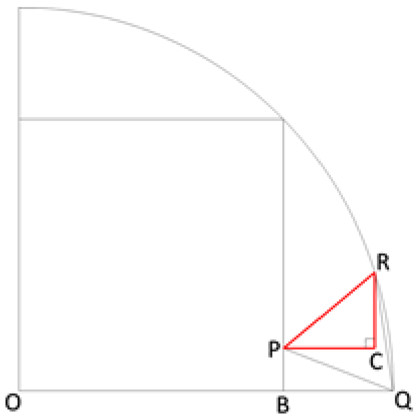
$$QH^2 + HR^2 = QR^2 \Rightarrow (1 - OH)^2 + HR^2 = QR^2$$

$$\Rightarrow (1 - x)^2 + y^2 = b^2$$

です。上式をx、yについて解くと、

$$x = 1 - \frac{b^2}{2}, y = b\sqrt{1 - \frac{b^2}{4}}$$

です。



そして、Pから水平方向に、Rから垂直方向に線を引き、交点をCとし、⊿CPRに三平方の定理を適用すると、

$$CP^2 + CR^2 = PR^2 \Rightarrow (x - a)^2 + (y - h)^2 = b^2$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{b^2}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(b\sqrt{1 - \frac{b^2}{4}} - \sqrt{b^2 - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\right)^2 = b^2$$

です。この式を展開すると、非常に煩雑な計算になりますが、bについて整理すると、次の 4 次方程式が得られます。

$$\Rightarrow b^4 + \left(\sqrt{2} - 5\right)b^2 + 6 - 4\sqrt{2} = 0$$

これを解いて、

$$b = \frac{\sqrt{9 - 3\sqrt{2}} - \sqrt{1 + \sqrt{2}}}{2}$$

となります。

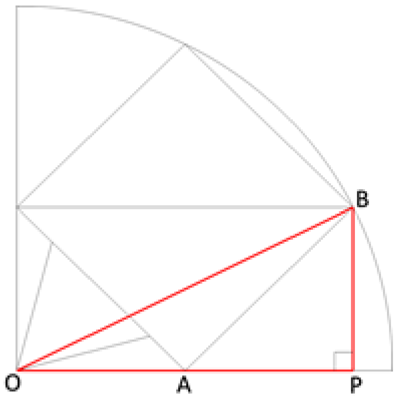
以上より、

$$\text{正方形の1辺} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{正三角形の1辺} = \frac{\sqrt{9 - 3\sqrt{2}} - \sqrt{1 + \sqrt{2}}}{2} = 0.31368159\cdots$$

です。

追加問題2



・正方形について

図のように、各点に記号を付け、BからOAに垂直に下した点をP、正方形の一辺の長さをaとして、⊿OPBに三平方の定理を適用すると、

$$\mathrm{OP}^2+\mathrm{PB}^2=\mathrm{OB}^2 \Rightarrow (\mathrm{OA}+\mathrm{AP})^2+\mathrm{PB}^2=\mathrm{OB}^2$$

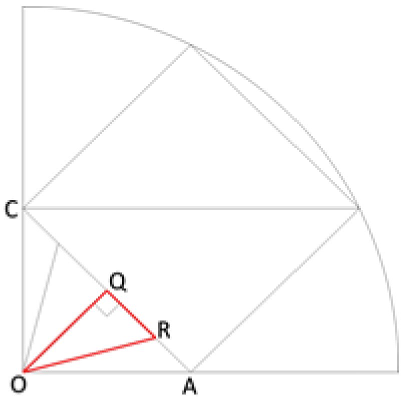
です。ここで、

$$\mathrm{OA}=\mathrm{AP}=\mathrm{PB}=\frac{a}{\sqrt{2}}$$

なので、

$$\left(\frac{a}{\sqrt{2}}+\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2=1^2 \Rightarrow a=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

です。



・正三角形について

図のように、各点に記号を付け、OからACに垂直に下した点をQとすると、⊿OQRの各辺の比は、

$$\mathrm{QR}:\mathrm{OQ}:\mathrm{OR}=1:\sqrt{3}:2$$

なので、

$$\mathrm{OR}=\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{OQ} \Rightarrow b=\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{OQ}$$

です。ここで、

$$\mathrm{OQ}=\mathrm{AQ}=\frac{\mathrm{AC}}{2}=\frac{a}{2}$$

なので、

$$b=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{a}{2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\frac{\sqrt{10}}{5}}{2}=\frac{\sqrt{30}}{15}$$

です。

以上より、

$$正方形の1辺=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$正三角形の1辺=\frac{\sqrt{30}}{15}$$

です。