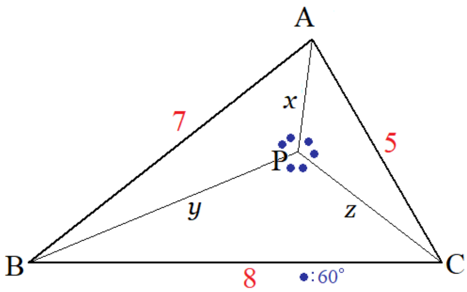
● 問題 462 解答＜三角定規＞

［問題］〈フェルマー点を利用する方法〉

$$\begin{cases} x^2+y^2+xy=49 & \cdots① \\ y^2+z^2+yz=64 & \cdots② \\ z^2+x^2+zx=25 & \cdots③ \end{cases}$$



△ ABC の 3 辺を右図のように 7, 8, 5 とする。

△ABC 内に点 P をとり PA$=x$, PB$=y$, PC$=z$ とする。

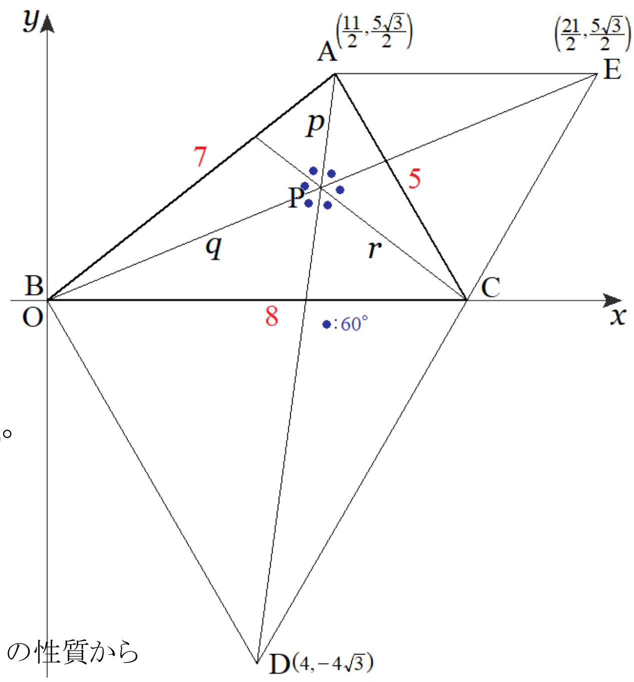
①式は

$$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2-2\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}\cos 120^\circ = \mathrm{AB}^2$$

と読むことができるから∠ APB ＝ 120°で, 同様に②③から∠ BPC ＝∠ CPA ＝ 120°。

よって, 点 P はフェルマー点である。

便宜のため PA ＝ p, PB ＝ q, PC ＝ r と書き換える。



右図のように座標軸, 座標, 各点を定め, △ ABC に対し, 2 点 D, E を図のように△ DCB, △ EAC が正三角形になるようにとる。

点 A の座標を (x, y) とすると

AB＝7 より， $x^2+y^2=49$ $\cdots④$

AC＝5 より， $(x-8)^2+y^2=25$ $\cdots⑤$

④⑤を連立させて解いて，A$\left(\dfrac{11}{2}, \dfrac{5\sqrt{3}}{2}\right)$。

また，$\cos\angle\mathrm{ACB}=\dfrac{5^2+8^2-7^2}{2\cdot5\cdot8}=\dfrac{1}{2}$ より $\angle\mathrm{ACB}=60^\circ$

よって AE // BC で，E$\left(\dfrac{21}{2}, \dfrac{5\sqrt{3}}{2}\right)$。

また，点 D の座標は D$(4, -4\sqrt{3})$。

P は 2 線分 AD, BE の交点であり，フェルマー点 P の性質から

$$p+q+r=\mathrm{BE}=\sqrt{\left(\frac{21}{2}\right)^2+\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\mathbf{129}} \quad \cdots[答]$$

求められてはいませんが…

AD の方程式 ： $y=\dfrac{13\sqrt{3}}{3}x-\dfrac{64\sqrt{3}}{3}$

BE の方程式 ： $y=\dfrac{5\sqrt{3}}{21}x$

連立させて解いて，P$\left(\dfrac{32\cdot7}{43}, \dfrac{32\cdot5\sqrt{3}}{43\cdot3}\right)$

$$p=\mathrm{AP}=\frac{25}{\sqrt{129}},\ q=\mathrm{BP}=\frac{64}{\sqrt{129}},\ r=\mathrm{CP}=\frac{40}{\sqrt{129}}$$

〈直接解く方法〉（大変でした！）

$$\begin{cases} x^2+y^2+xy=49 & \cdots① \\ y^2+z^2+yz=64 & \cdots② \\ z^2+x^2+zx=25 & \cdots③ \end{cases}$$

①を $y>0$ として解くと $y=\dfrac{-x+\sqrt{196-3x^2}}{2}$ …④

同様に，③を $z>0$ として解くと $z=\dfrac{-x+\sqrt{100-3x^2}}{2}$ …⑤

②に①③④⑤を代入し

$$\begin{aligned} y^2+z^2+yz &= 49-x^2-xy+25-x^2-xz+yz \\ &= 74-2x^2-x(y+z)+yz \\ &= 74-2x^2-x\left(-x+\frac{\sqrt{196-3x^2}}{2}+\frac{\sqrt{100-3x^2}}{2}\right)+\frac{\sqrt{196-3x^2}\sqrt{100-3x^2}}{4}=64 \quad \cdots⑥ \end{aligned}$$

⑥を整理しながら2回平方すると，高次の項が消えて（←以下 WolframAlpha にやってもらいました）

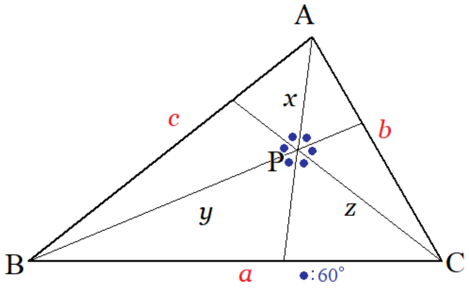
$$⑥ \Leftrightarrow 129x^4-3850x^2+15625=(x^2-25)(129x^2-625)=0 \quad \therefore\ x^2=25,\ \frac{25^2}{129}$$

$x^2=25$ は⑤に戻すと $z\leqq 0$ となり 不適。∴ $x=\dfrac{25}{\sqrt{129}}$ …⑦

⑦を④⑤に戻し，$y=\dfrac{64}{\sqrt{129}}$，$z=\dfrac{40}{\sqrt{129}}$

以上より，$x+y+z=\dfrac{25+64+40}{\sqrt{129}}=\boldsymbol{\sqrt{129}}$ …[答]

［補題］右図の△ ABC に対し，△ PAB, △ PBC, △ PCA の余弦定理を適用し



$$\begin{cases} x^2+y^2+xy=c^2 & \cdots① \\ y^2+z^2+yz=a^2 & \cdots② \\ z^2+x^2+zx=b^2 & \cdots③ \end{cases}$$

①＋②＋③：$2(x^2+y^2+z^2)+xy+yz+zx$

$$=2(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)=a^2+b^2+c^2 \quad \cdots④$$

また，$S=\triangle ABC=\triangle PAB+\triangle PBC+\triangle PCA$

$$=\frac{1}{2}\cdot y\cdot x\sin 60^\circ+\frac{1}{2}\cdot z\cdot y\sin 60^\circ+\frac{1}{2}\cdot x\cdot y\sin 60^\circ$$

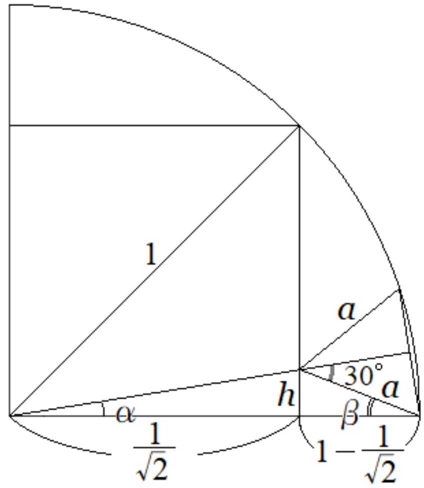
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(xy+yz+zx) \qquad \therefore\ xy+yz+zx=\frac{4}{\sqrt{3}}S \quad \cdots⑤$$

④に⑤を代入し $2(x+y+x)^2=a^2+b^2+c^2+3\cdot\dfrac{4}{\sqrt{3}}S$

$$\therefore\ x+y+z=\boldsymbol{\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)+2\sqrt{3}\,S}} \quad \cdots[答]$$

《追加問題》

[問題１] 正方形の 1 辺は $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$



正三角形の 1 辺を a とし，図のように角 α, β 及び h を定めると

$$\tan\alpha=\frac{h}{1/\sqrt{2}}=\sqrt{2}\,\alpha,\ \tan\beta=\frac{h}{1-1/\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\,h}{\sqrt{2}-1}$$

$\alpha+\beta=30^\circ$ だから

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\cdots=\frac{2h}{\sqrt{2}-1-2h^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

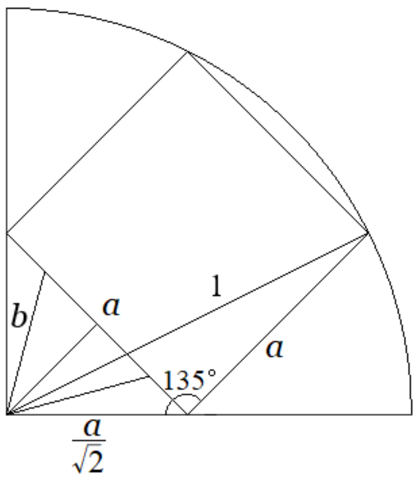
$$\therefore\ 2h^2+2\sqrt{3}\,h-\sqrt{2}+1=0$$

$h>0$ でこれを解いて，$h=\dfrac{\sqrt{1+2\sqrt{2}}-\sqrt{3}}{2}$

$$\therefore\ a=\sqrt{h^2+\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\cdots=\sqrt{\frac{5-\sqrt{2}-\sqrt{3+6\sqrt{2}}}{2}}$$

以上より，正方形の 1 辺 ： $\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$，正三角形の 1 辺 ： $\boldsymbol{\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{2}-\sqrt{3+6\sqrt{2}}}{2}}}$ (=0.3136…) …[答]

[問題２] 正方形の 1 辺を a とすると, 右図のようになるから



$$\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2+a^2-2\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}\cdot a\cos 135^\circ=\frac{5}{2}a^2=1\ \ \therefore\ a=\sqrt{\frac{2}{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

正三角形の 1 辺を b とすると, 図より

$$\frac{\sqrt{3}}{2}b=\frac{a}{2}\ \ \therefore\ b=\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{30}}{15}$$

以上より，正方形の 1 辺 ： $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{10}}{5}}$ (=0.7905…)

正三角形の 1 辺 ： $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{30}}{15}}$ (=0.3651…)

…[答]