

未解決問題

未解決問題

20

✎

✏

✂

🗨

🌟

🖼

T

🔦

—

—

—

●

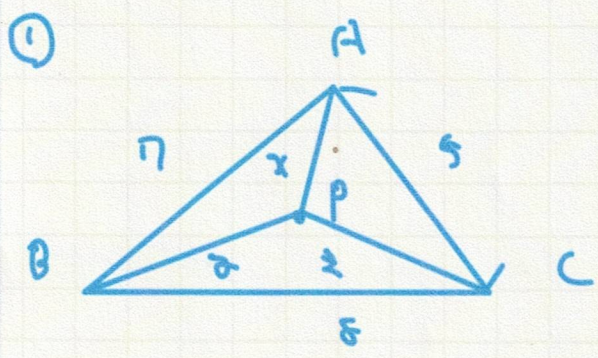
👉

最短距離

$x^2 + y^2 + xy = 49$

$y^2 + z^2 + yz = 64$

$z^2 + x^2 + zx = 95$



Pは三角形の内部にある点

$\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120^\circ$

$\triangle APC, \triangle BPC, \triangle APB$ に余弦定理より

$AC = 5, BC = 8, AB = 7$

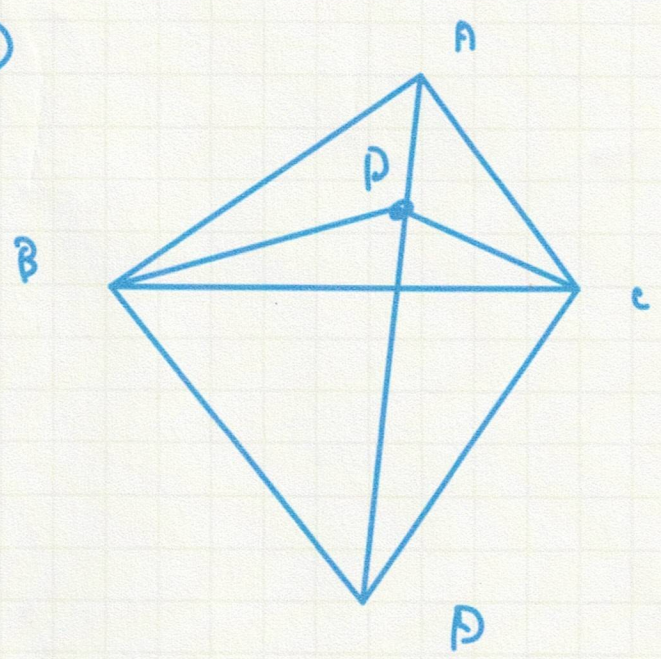
ここで、次に $\triangle ABC$ の外側に

BC を底辺として正三角形 BCD を作る。

と作ると

$\left(\begin{array}{l} \triangle ABC \text{ は } 8^2 < 5^2 + 7^2, 7^2 < 5^2 + 8^2 \\ 5^2 < 8^2 + 7^2 \text{ より、鋭角三角形である} \end{array} \right)$

②



よって

$\angle BDC + \angle BPC = 180^\circ$ より、

4点 B, D, C, P は同一円周上。

$\angle BPC = \angle BDC = 60^\circ$ より

$\angle DPA = \angle BPC + \angle BPA = 180^\circ$

より、3点 B, P, D は同一直線上にある。また、

$PD = BP + CP$ となる。

$AD = AP + BP + CP$

$= x + y + z$

よって



未解決問題



bary-full

x

未解決問題



③

 $\triangle ABC$ 余弦定理より

$$7^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \times 8 \times 5 \times \cos \angle ACB$$

$$2 \times 8 \times 5 \times \cos \angle ACB = 40$$

$$\cos \angle ACB = \frac{1}{2}$$

$$0^\circ < \angle ACB < 180^\circ \text{ より}$$

$$\angle ACB = 60^\circ$$

よって ②より $\triangle ACD$ は

$$\text{等腰三角形で } CD = DC = 8, \angle ACD = 120^\circ$$

よって 余弦定理より

$$AD^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \times 5 \times 8 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$AD^2 = 25 + 64 + 40$$

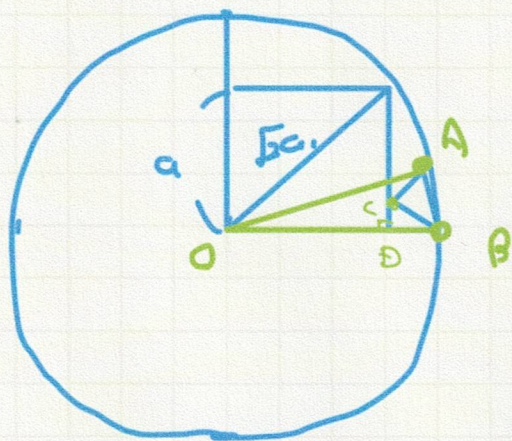
$$AD^2 = 129$$

 $AD > 0$ より

$$AD = \sqrt{129}$$

$$\therefore x + y + z = \sqrt{129} \dots \left(\frac{47}{2}\right)$$

追加問題は



正方形の1辺 a である。正方形の対角線は $\sqrt{2}a$ である。今、円半径は 1 である。 $\sqrt{2}a = 1 \quad \therefore a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (答)

上記の $\angle$ に注意して。 $\triangle OCA \cong \triangle OCB$ である。
 $(\because OA = OB, CA = CB, OC \text{ は共通}) \therefore \angle A = \angle B = 60^\circ$ である。

$\angle OCA = \angle OCB = 150^\circ$ である。 $OC = x$ とする。 $\triangle OCB$ に対して余弦定理より $OB^2 = OC^2 + CB^2 - 2 \times OC \times CB \times \cos(150^\circ)$ である。

$1 = x^2 + b^2 + \sqrt{3}bx$ である。 $CD = y$ とする。 $\triangle OCB$ に対して余弦定理より。

$(a-b)(a+b) = (1-x) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}b$ であり $a^2 - b^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}b + \frac{\sqrt{3}}{2}bx$ である。

$a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ であり $\frac{1}{2} - b^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}b + \frac{\sqrt{3}}{2}bx$ であり $\triangle OCB \cong \triangle OCB$ である。
 $\therefore$ 上の定理より、 $x^2 = y^2 + \frac{1}{4}$ ①, $b^2 = y^2 + (1 - \frac{1}{2})^2$ ② である。

③

④

3



②, ③ から, $1 = x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}b + \frac{\sqrt{3}}{2}bx$ とおき, $2 = 2x^2 + \sqrt{3}b + \sqrt{3}bx$ とおき,

②+③から, $1 = x^2 - b^2 + \sqrt{3}b$ とおき, $x^2 = b^2 - \sqrt{3}b + 1$ とおき,

④から $y^2 = b^2 - (1 - \frac{1}{\sqrt{3}})^2$ とおき, ③から

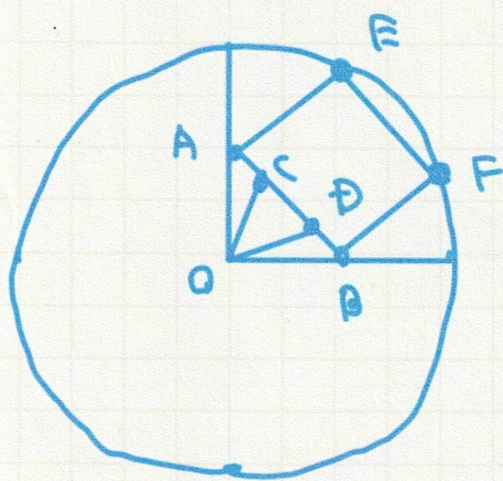
$$b^2 - \sqrt{3}b + 1 = b^2 - (1 - \frac{1}{\sqrt{3}})^2 + \frac{1}{3}$$

$$b^2 - \sqrt{3}b + 1 = b^2 - 1 + \sqrt{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

$$2 - \sqrt{3} = \sqrt{3}b$$

$$b = \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{3} \dots \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

追加問題 頁 2



四角形の中心角 α = 等分線に關し, 打ち解くとき, $\angle E$ である。

上記 α 通りに記号 α とおき, 三角形 OAB は $OA = OB$ の直角

二等辺三角形から $AB = a$ として $OA = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ とし $\angle OAF = 135^\circ$ とおき

未解決問題

未解決問題

bary-full

$$1^2 = \frac{1}{2}a^2 + a^2 - 2 \times \frac{1}{5}a \times a \times \left(-\frac{1}{5}\right)$$

$$1 = \frac{5}{2}a^2$$

a > 0 ∴

$$a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5} \dots \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$$

AC = $\frac{1}{2}(a-b)$ となる, $\triangle AOC$ に 余弦定理 を用いる。

$$b^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}(a-b)^2 - 2 \times \frac{a}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}(a-b) \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \text{ となる}$$

$$b^2 = \frac{1}{5} + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{\sqrt{10}}a + \frac{1}{\sqrt{10}}b$$

$$b^2 = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} - \frac{1}{\sqrt{10}}b + \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{5} + \frac{1}{\sqrt{10}}b$$

$$\frac{3}{4}b^2 = \frac{1}{10}$$

$$b^2 = \frac{4}{30}$$

$$b > 0 \therefore b = \frac{2}{\sqrt{30}} = \frac{2\sqrt{30}}{30} = \frac{\sqrt{30}}{15} \dots \left(\frac{\sqrt{30}}{15}\right)$$