

第 463 回

問題 1

- (1) $x^8 - x + 1$ を因数分解せよ。
- (2) $2026^8 - 2025$ は素数か合成数が判定せよ。

ヒント -1 の 3 乗根

問題 2 $x^2 + 2x + 4 = 0$ の解を α, β とするとき,

- (1) $\alpha^n + \beta^n$ を n で表せ。
- (2) $|\alpha^{2026} + \beta^{2026}|$ を 31 で割った余りを求めよ。

ヒント 8 の 3 乗根

問題 3

- (1) 2026 を自然数の 3 乗和で表し, その個数を 6 個以内でできるだけ見つけてください。
- (2) (1) で見つけたなかで, 2026^{2026} をできるだけ少ない個数の自然数の 3 乗和でひとつ表せ。

解答

問題 1

- (1) ω を 1 の虚数立方根とする。 $\omega^3 = 1, \omega + \omega^2 = -1, \omega = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$x^8 - x + 1 = f(x)$ とおく。

$f(-\omega) = \omega^8 + \omega + 1 = \omega^2 + \omega + 1 = 0, f(-\omega^2) = \omega^{16} + \omega^2 + 1 = \omega + \omega^2 + 1 = 0$ であるから, 因数定理により, $f(x)$ は $(x + \omega)(x + \omega^2) = x^2 - x + 1$ を因数にもつ。

$f(x)$ を $x^2 - x + 1$ で実際に割り算をすると,

$$\begin{array}{r}
 x^8 - x + 1 \over x^2 - x + 1 \\
 \underline{x^8 \\
 x^7 - x^6 \\
 \underline{x^7 - x^6 + x^5 \\
 -x^5 \\
 \underline{-x^5 + x^4 - x^3 \\
 -x^4 + x^3 \\
 \underline{-x^4 + x^3 - x^2 \\
 x^2 - x + 1 \\
 \underline{x^2 - x + 1 \\
 0
 \end{array}$$

よって, $f(x) = (x^2 - x + 1)(x^6 + x^5 - x^3 - x^2 + 1)$ 〔答〕

- (2) $2026^8 - 2025 = 2026^8 - 2026 + 1 = f(2026)$

よって, (1) により, $f(2026)$ は少なくとも 2 因数に分解されるから, $2026^8 - 2025$ は合成数である。 〔答〕

〔補足〕 $2026^8 - 2025 = 7 \cdot 19 \cdot 41 \cdot 109 \cdot 167 \cdot 283 \cdot 10443359 \cdot 50928023$

問題2 ω を1の虚数立方根とする。 $\omega^3=1$, $\omega+\omega^2=-1$, $\omega=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(1) $x^2+2x+4=0$ の両辺を4で割ると, $\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{x}{2}+1=0$

$\therefore \frac{x}{2}=\omega, \omega^2$ であるから, $\alpha=2\omega, \beta=2\omega^2$ とおける。

$$\alpha^n+\beta^n=(2\omega)^n+(2\omega^2)^n=2^n(\omega^n+\omega^{2n})=\begin{cases} 2^{n+1} (n=3k \text{ のとき}) \\ -2^n (n=3k\pm 1 \text{ のとき}) \end{cases} \quad \text{答}$$

(2) $2026=3\cdot 675+1$ であるから, $|\alpha^{2026}+\beta^{2026}|=|-2^{2026}|=2^6\cdot(2^{10})^{202}$

ここで, $2^6=64=31\cdot 2+2\equiv 2 \pmod{31}$, $2^{10}=1024=31\cdot 33+1$ より, $2^{10}\equiv 1 \pmod{31}$

$$\therefore |\alpha^{2026}+\beta^{2026}|\equiv 2 \pmod{31}$$

よって, $|\alpha^n+\beta^n|$ を31で割った余りは, 2 答

問題3

(1) $12^3=1728<2026<2197=13^3$ である。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n^3	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000	1331	1728

1^3 から 12^3 までの値を使って, 2026 を高々個数6で分解する。

$2026=n^3+a^3+b^3+c^3+d^3+e^3$ ($12\geq n\geq a\geq b\geq c\geq d\geq e\geq 0$) とおき,

$n=12, 11, 10, 9$ と下げて調べていく。

[1] $n=12$ のとき, $2026=12^3+6^3+3^3+3^3+3^3+1^3$ (6個)

[2] $n=11$ のとき, $2026=11^3+7^3+7^3+2^3+1^3$ (5個)

$$2026=11^3+7^3+6^3+4^3+4^3+2^3 \quad (6\text{個})$$

[3] $n=10$ のとき, $2026=10^3+9^3+6^3+3^3+3^3+3^3$ (6個)

$$2026=10^3+8^3+8^3+1^3+1^3 \quad (5\text{個})$$

[4] $n=9$ のとき, $2026=9^3+9^3+7^3+6^3+2^3+1^3$ (6個)

[5] $n\leq 8$ のとき, 解なし。

よって, $2026=12^3+6^3+3^3+3^3+3^3+1^3=11^3+7^3+7^3+2^3+1^3=11^3+7^3+6^3+4^3+4^3+2^3$

$$=10^3+9^3+6^3+3^3+3^3+3^3=10^3+8^3+8^3+1^3+1^3=9^3+9^3+7^3+6^3+2^3+1^3 \quad \text{答}$$

補足

[1] 2026 は自然数4個の3乗和に分解できないが, 整数に拡張すると, $2026=10^3+10^3+3^3+(-1)^3$ と分解できる。

[2] 2026 を自然数7個の3乗和に分解すると,

$$2026=12^3+6^3+4^3+2^3+2^3+1^3+1^3=11^3+8^3+4^3+4^3+3^3+3^3+1^3=10^3+10^3+2^3+2^3+2^3+1^3+1^3$$

$$=10^3+9^3+6^3+4^3+2^3+2^3+1^3=10^3+7^3+6^3+6^3+6^3+3^3+2^3=10^3+7^3+6^3+6^3+5^3+5^3+1^3$$

$$=9^3+9^3+8^3+3^3+3^3+1^3+1^3=9^3+9^3+6^3+6^3+4^3+4^3+2^3=9^3+8^3+7^3+7^3+4^3+3^3+2^3$$

の9通りが考えられる。

(2) (1)より, 2026 の分解は5個が最小である。

$$2026=11^3+7^3+7^3+2^3+1^3 \quad (5\text{個}) \quad \dots\textcircled{1}, \quad 2026=10^3+8^3+8^3+1^3+1^3 \quad (5\text{個}) \quad \dots\textcircled{2}$$

①, ②の両辺に, $2026^{2025}=(2026^{675})^3$ を掛けると,

$$2026^{2026}=(11\cdot 2026^{675})^3+(7\cdot 2026^{675})^3+(7\cdot 2026^{675})^3+(2\cdot 2026^{675})^3+(2026^{675})^3 \quad \dots\textcircled{1'}$$

$$2026^{2026} = (10 \cdot 2026^{675})^3 + (8 \cdot 2026^{675})^3 + (8 \cdot 2026^{675})^3 + (2026^{675})^3 + (2026^{675})^3 \dots \textcircled{2}$$

よって、

(1) で見つけたなかで、 2026^{2026} をできるだけ少ない個数の自然数の 3 乗和でひとつ表すと、①または②となる。 図

【参考】 2026^{2026} は 6700 桁の数である。

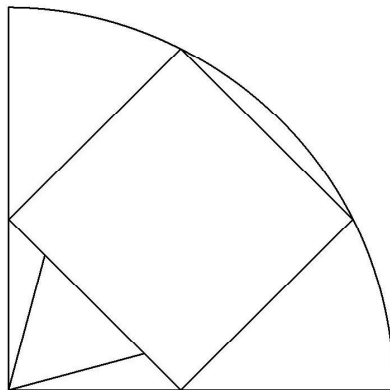
1784462867121310262740641851755043463162354167972094610599765126951240
4652118476815365805461837349292895697070645573292082389647770109406345
7346609035432897481064397945583852488059524667976563702688707084456155
4291403582587231458907269440119077099618007241768176147580637126260558
4840852032869217682755281307093207922889034737332651741862324832450239
8482996499613778951491776276191348758397998535156233807427324664892907
6900894033308400294060694617537611960725397414358931493365697341277329
6138800234303219698695575790182732037369466203335209465590186664337758
4220817902849123133856704818738191923433850806146210291645804973331795
4248155460866085352283619939683608156023729824025027218229078874220334
6333013383948321521940575970308101909306016127394580669966809267251798
1595050231756570936939079333420667243346486732511880979889903445057879
3068589525559597395580220264069770750643032931418485929180663522468338
8405245286680918167177948457667370875363342267870791628172695152703042
2138657415935621987293956481013176426693487411357734565012982223341481
4733834695891554214057986828441562345311021821786280283874948829150084
5012329615574992821832768104839275191159831180629934985035791661512557
5010739284677493466230454213883191227898597535580065747474590384867647
6579050908438228935350843061457647211936926747019286300548683246331057
3490043027844612571004607044767436167670908661353339002115202597562508
4255834676883161303306729254288033628918791685112311410239349202536609
9682566998541399008570322972812276217409517927936903664271887938970857
0520572000510959597885572172047000633098161753154405763073813163825540
7698727437091428048786228052505406685539465991494939797096191216597026
2923775484894833555178772646329781521077008484160682124220070471451997
2275161309609062745216345431980136132907088153257007736735650650680851
3418865952269058087090739496563617833669131493999941786666337281269024
8258222167086359930505674481619418794827297277972381061438393156427969
6625865845020857084447761382607314721911312314919267448475056575748062
0462705908997133230225489712623964976882106075929410020396067133851028
9227847249972884608523402255184923955722110531954668347524471670650245
3066270412793435820715186462111488895702913670811495104077521725754915
7863684393454565018738012482151263182018627280078159240852456925075039
0216337782663742255824783008120880669362669631243283634856928077523170
2232838882986306337003859310941752558240478237530571909269196401255236
1036284635091619095726328771216428562724559215993019919373728401871576
402805664372347674076930440724984591465420607770566660235297003655416

1145601120149391526148540028183114537105971401309045553994986263918968
4929226814838081075538586911565389929667540345751612971357596487012847
1249184742268785856020387322786373740673434622140654404791997270599689
8264902002591145495304868723884256553591893697095396466082768952931632
3971672608060309619702801055358263644915165674441784077322794578080373
2643624575867663951496511291524561340344530336343672468523520039130410
9597743001006154035113617740862881148512247437665848415345811668415815
3986667173839996655621512463005698184394302682989184907060491133089440
8548607317690221970188775226427622882830700516160070177531184138716297
4253179191959104999803239594825449634797668304211999776494749693319263
3765948440985598579301662954955686351480219805892504139677337491133863
4068692202709004086272672328870033717247564175796248300403707356147325
3992964967482957292789328789253193868746990871907185336176743837970152
7717907479072017912975581331821641078885870069415025927985814378682261
1039887162569816074060044666724530114923505129782828571519392839960616
2612839594958548956783486713344170690067087265673872014502570603996276
3997661274354878123124155918392495421151877901235900790324853257237731
2666937300148147973078353100246791274367863848204463675683618822333906
8511130387792658977884905019356674152273116381255419381615742268269438
7292640300497980675655367340457013380674183694441629623378517049385798
1944866534311553062902534542059924424599003243110631050308136586392831
6525765684668921555726188033918605527599340749145882036329985965837331
5775885017975094362550768172240782483146352803564408131713712713821531
2012918185416232537006418650465000500718402701661707284675333241284193
1651535721552406755496557001389866478342019572561191616450641562429506
3783974146050535905009499587240425341590443035090333076909916654268502
6991233511725582135810964915468080929785440851165305725409764254258726
8123546219114470441802125330583505293252794720543177526878865160740890
7598534354493428102535724403480949566561354743041160275545335797850824
2280825573412421157284996514809148591482525986251728272925696722562373
8720942731533391518631169096663879861742106895362567456597051469268454
0236977254970507074541118913200730804437766178170501646015257008600770
5831465275997341376074564633961120163374141629433171672098430807623542
8164338278565534392038805558902164581453018209014833272563819635989684
3603902173401338626582197112151402266602893422915205034900939862358442
3354309285687099589385211171049336647609752810367100219395454874754375
4947105373868626739892621083595239969085078137277615719877555171101892
2110570564119093153976524255018580732851583970358118562062155654007179
0406724732345910685199762131004942679667993937540123073080426859929586
1916168641838986297895183493139471879764008218042486372195614135509025
089822586343332029484621478997192731793408753702904261563468239444434

9886362128799949417707169374434216649475334541213730211463011123995441
 0756784313603421611529380387472009163598725870300539787901082318049226
 5992537391682498868826300610925498567348449490950201074919541608611938
 9430915059611418098846752328733524952908603738108004524464355788749397
 1026912568553022614004240542345558773399969179218317588200999427395542
 1336330783958775492535520176175676491950175066030433477078645104693914
 5806656600731753543518145575259243845113809101965959927672783115708351
 9307488769535628869572743250836367421983878223669657168619901414269658
 9748437586269923124597384430682602513223635168071582396694614297424572
 8430134829407634812601084397442517858670941301355637169652382131636045
 5623994079376795526029081290303750839855071860811137330967608611176878
 6314742216315399150161986557904907519771080950229210512630869267658543
 2960534452183991683572001431014281123515980469717864849183047920069498
 3884075891626014772888043330980591107753873595855683819282615997637069
 5976462174894276087293928285557210797729037739795818173604868201711613
 0700936934095727559749556987947718120213829741311634847894926873600987
 2082154948072981959826198331997303732381143199670250512270524152069751
 93769880754087167841306841447292532972455540555776 (Mathematica による)

追加問題 1

半径 1 の四分円内に、図のように
 正方形と正三角形が配置されてい
 る。
 それぞれの 1 辺の長さを求めよ。



【解答】 正方形と正三角形の 1 辺の長さをそれぞれ a , b とおき、
 図のように記号を付ける。

$\triangle FOC$, $\triangle CID$ は合同な直角二等辺三角形であるから、 $OC=CI=ID=\frac{a}{\sqrt{2}}$

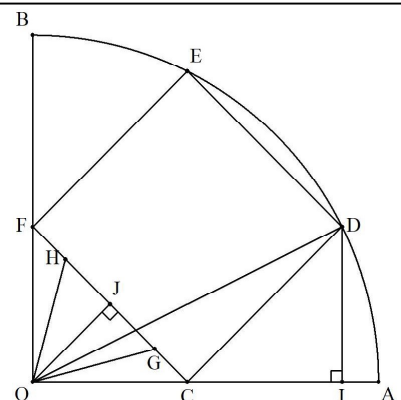
$\triangle DOI$ について、 $OI=OC+CI=\frac{a}{\sqrt{2}}+\frac{a}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}a$, $ID=\frac{a}{\sqrt{2}}$, $DO=1$

であるから、三平方の定理により、 $(\sqrt{2}a)^2+\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2=1$ $a^2=\frac{2}{5}$

$a>0$ より、 $a=\sqrt{\frac{2}{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$ (≈ 0.632456)

次に、 $\triangle OGJ$ について、 $\angle HOJ=30^\circ$ であるから、 $OJ=\frac{\sqrt{3}b}{2}$...①

$\triangle OCJ$ は直角二等辺三角形であるから、 $OJ=CJ=\frac{a}{2}$...②



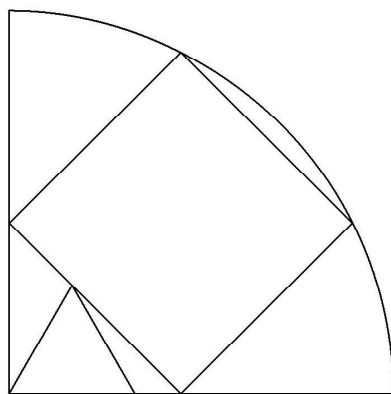
$$\textcircled{2}, \textcircled{1} \text{より}, \frac{\sqrt{3}b}{2} = \frac{a}{2} \quad \therefore b = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{\sqrt{10}}{5}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{30}}{15} \quad (\approx 0.365148)$$

よって、求める1辺の長さは、正方形： $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ，正三角形： $\frac{\sqrt{30}}{15}$ 答

追加問題2

半径1の四分円内に、図のように正方形と正三角形が配置されている。

それぞれの1辺の長さを求めよ。



解答 正方形と正三角形の1辺の長さをそれぞれ a ， b とおき、図のように記号を付ける。

$\triangle OCF$ ， $\triangle IDC$ は合同な直角二等辺三角形であるから， $OC=CI=ID=\frac{a}{\sqrt{2}}$

$\triangle DOI$ について， $OI=\frac{a}{\sqrt{2}}+\frac{a}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}a$ ， $ID=\frac{a}{\sqrt{2}}$ ， $DO=1$ であるから，

三平方の定理より， $(\sqrt{2}a)^2+\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2=1^2 \quad \therefore a^2=\frac{2}{5}$

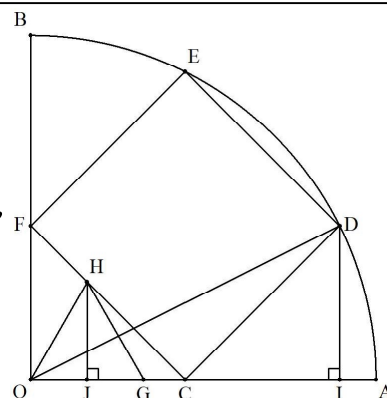
$a>0$ より， $a=\frac{\sqrt{10}}{5}$ (≈ 0.632456)

$\triangle HOG$ は正三角形であるから， $OJ=\frac{b}{2}$ ， $JC=JH=\frac{\sqrt{3}b}{2}$

$OJ+JC=OC$ より， $\frac{b}{2}+\frac{\sqrt{3}b}{2}=\frac{a}{\sqrt{2}}$

$\therefore b=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}a=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2}\cdot\frac{\sqrt{10}}{5}=\frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{5}$ (≈ 0.327383)

よって、求める1辺の長さは、正方形： $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ，正三角形： $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{5}$ 答



(2026/1/4 ジョーカー)