問題1

(1) ヒントにある「−1 の 3 乗根」を考えます。$x^3=-1$を満たす方程式$x^3+1=0$を因数分解すると、

$$(x+1)(x^2-x+1)=0$$

となります。この階のうち、虚数解（$x^2-x+1=0$の解）の一つをωとおきます。ωは以下の性質を持ちます。

・方程式の解である：$\omega^2-\omega+1=0 \Rightarrow \omega^2=\omega-1$

・3 乗すると−1 になる：$\omega^3=-1$

・6 乗すると 1 になる：$\omega^6=\left(\omega^3\right)^2=(-1)^2=1 \cdots \omega$の位数$=6$

ここで、与えられた式を$P(x)=x^8-x+1$とおき、$x=\omega$を代入してみます。

$$P\left(\omega\right)=\omega^8-\omega+1$$

上記の性質（$\omega^6=1$）を利用して、次数を下げると、

$$\omega^8=\omega^6\cdot\omega^2=1\cdot\omega^2=\omega^2$$

となるので、

$$P\left(\omega\right)=\omega^2-\omega+1$$

となりますが、上記の性質（$\omega^2-\omega+1=0$）より、$P\left(\omega\right)=0$となります。$x=\omega$を代入して式が 0 になるということは、因数定理の考え方を広げると、元の式は ω を解に持つ 2 次式x^2-x+1で割り切ることができます。高校数学の範囲では、実数係数の多項式に虚数を代入して因数定理を使うことは、少々論理の飛躍があると考えますが、実際に割り算をやって確かめてみると、

$$\frac{x^8-x+1}{x^2-x+1}=x^6+x^5-x^3-x^2+1$$

となり、割り切れます。よって、

$$x^8-x+1=(x^2-x+1)(x^6+x^5-x^3-x^2+1)$$

と因数分解できます。

(2) (1)の因数分解の結果を使用します。

$x^8 - x + 1 = (x^2 - x + 1)(x^6 + x^5 - x^3 - x^2 + 1)$

この恒等式に、$x = 2026$を代入すると、

左辺 $= 2026^8 - 2026 + 1 = 2026^8 - 2025$

また、

右辺 $= (2026^2 - 2026 + 1)(2026^6 + 2026^5 - 2026^3 - 2026^2 + 1)$

となり、2つの整数の掛け算の形になります。ともに 1 より大きな整数なので、合成数です。

問題2

(1) 与式を解くと、$x = -1 \pm \sqrt{3}i$ですが、これを複素平面上の極形式$r(\cos\theta + i\sin\theta)$で表現すると、

$$r = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$$

$$\alpha = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

となり、βはαの共役複素数なので、

$$\beta = \overline{\alpha} = \overline{2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

です。次に、ド・モアブルの定理$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$を$\alpha$、$\beta$に適用すると、

$$\alpha^n = \left\{2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right\}^n = 2^n\left\{\cos\frac{2n\pi}{3} + i\sin\frac{2n\pi}{3}\right\}$$

$$\beta^n = \left\{2\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right\}^n = 2^n\left\{\cos\frac{2n\pi}{3} - i\sin\frac{2n\pi}{3}\right\}$$

となり、これらを足すと、

$$\alpha^n + \beta^n = 2^n\left\{\cos\frac{2n\pi}{3} + i\sin\frac{2n\pi}{3}\right\} + 2^n\left\{\cos\frac{2n\pi}{3} - i\sin\frac{2n\pi}{3}\right\} = 2^{n+1}\cos\frac{2n\pi}{3}$$

となります。

(2) ヒントにある「8 の 3 乗根」は、方程式$x^3 = 8$の解です。一つの解は$x = 2$なので、$x^3 - 8$を$x - 2$で割り切ることができて、

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

と因数分解できます。α、βは$x^2 + 2x + 4 = 0$の解ですが、$x^3 = 8$の解でもあるので、$\alpha^3 = 8$、$\beta^3 = 8$が言えます。すると、$2026 = 3 \times 675 + 1$なので、

$$\alpha^{2026} + \beta^{2026} = \alpha^{3\times675+1} + \beta^{3\times675+1} = (\alpha^3)^{675}\alpha + (\beta^3)^{675}\beta = 8^{675}\alpha + 8^{675}\beta = 8^{675}(\alpha + \beta)$$

となります。次に、$31 = 2^5 - 1$に気づけば、フェルマーの小定理よりも強力な道具「メルセンヌ素数」があって、$2^5 \equiv 1 \pmod{31}$を使えば、

$$8^5 = (2^3)^5 = 2^{15} = (2^5)^3 \equiv 1^3 \equiv 1 \pmod{31}$$

です。そして、$675 = 5 \times 135$なので、

$$8^{675} = (8^5)^{135} \equiv 1^{135} \equiv 1 \pmod{31}$$

と一気に次数を下げることができます。よって、

$$\alpha^{2026} + \beta^{2026} \equiv 8^{675}(\alpha + \beta) \equiv 1 \cdot (\alpha + \beta) = 2^{1+1}\cos\frac{2\pi}{3} = -2 \pmod{31}$$

ここで、求めるものは絶対値$|\alpha^{2026} + \beta^{2026}|$を31で割った余りなので、

$$|\alpha^{2026} + \beta^{2026}| \equiv |-2| = 2 \pmod{31}$$

です。

問題3

(1) 整数論では「Waring 問題」という深いテーマで知られているそうですが、直感でやってもあまり難しくなさそうです。$13^3 = 2197 > 2026$ですから、2026の3乗和の候補は$1^3, 2^3, 3^3, \cdots 12^3$の12個なので、プログラムを使わなくとも、賢く総当たりして探すと、以下の通りです。

5 個の 3 乗和による表現(全 2 個)

1. $2026=1^3+2^3+7^3+7^3+11^3$=1+8+343+343+1331
2. $2026=1^3+1^3+8^3+8^3+10^3$=1+1+512+512+1000

6 個の 3 乗和による表現(全 4 個)

1. $2026=3^3+3^3+3^3+6^3+9^3+10^3$=27+27+27+216+729+1000
2. $2026=2^3+4^3+4^3+6^3+7^3+11^3$=8+64+64+216+343+1331
3. $2026=1^3+3^3+3^3+3^3+6^3+12^3$=1+27+27+27+216+1728
4. $2026=1^3+2^3+6^3+7^3+9^3+9^3$=1+8+216+343+729+729

なお、参考までに、簡単なプログラムを補足に記載しておきます。

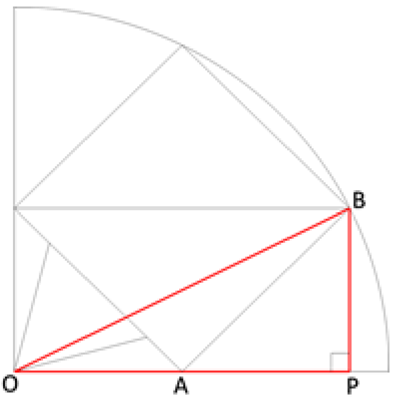
(2) $2026 = 3 \times 675 + 1$より、$2026 \equiv 1 \pmod 3$なので、3の剰余類で類別するのが良いと思います。$\mathrm{A} = 2026^{675}$とすると、

$$2026^{2026} = 2026^1 \times \mathrm{A}^3 = 2026 \times \mathrm{A}^3$$

2026は前問(1)で5個の3乗和で2個の表現があったので、その内の1個を利用して、次のように表すことができます。

$$\begin{aligned} 2026^{2026} &= 2026 \times \mathrm{A}^3 \\ &= (1^3 + 2^3 + 7^3 + 7^3 + 11^3) \times \mathrm{A}^3 \\ &= \mathrm{A}^3 + (2\mathrm{A})^3 + (7\mathrm{A})^3 + (7\mathrm{A})^3 + (11\mathrm{A})^3 \\ &= (2026^{675})^3 + (2 \times 2026^{675})^3 + (7 \times 2026^{675})^3 + (7 \times 2026^{675})^3 + (11 \times 2026^{675})^3 \end{aligned}$$

追加問題1



・正方形について

図のように、各点に記号を付け、BからOAに垂直に下した点をP、正方形の一辺の長さをaとして、⊿OPBに三平方の定理を適用すると、

$$OP^2 + PB^2 = OB^2 \Rightarrow (OA + AP)^2 + PB^2 = OB^2$$

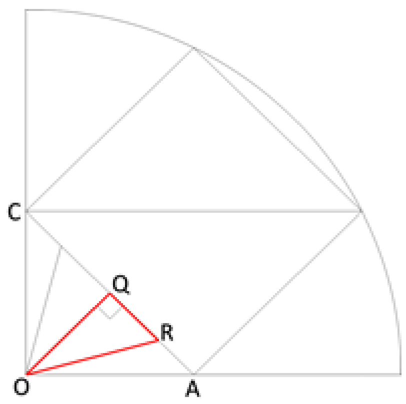
です。ここで、

$$OA = AP = PB = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

なので、

$$\left(\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1^2 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

です。



・正三角形について

図のように、各点に記号を付け、OからACに垂直に下した点をQとすると、⊿OQRの各辺の比は、

$$QR : OQ : OR = 1 : \sqrt{3} : 2$$

なので、

$$OR = \frac{2}{\sqrt{3}}OQ \Rightarrow b = \frac{2}{\sqrt{3}}OQ$$

です。ここで、

$$OQ = AQ = \frac{AC}{2} = \frac{a}{2}$$

なので、

$$b = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{10}}{5}}{2} = \frac{\sqrt{30}}{15}$$

です。

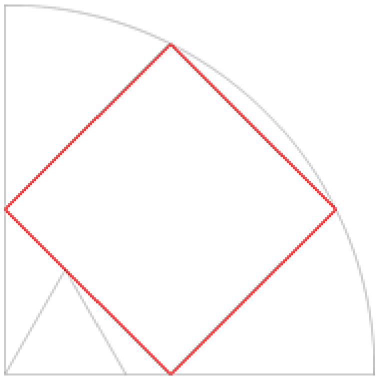
以上より、

$$正方形の1辺 = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$正三角形の1辺 = \frac{\sqrt{30}}{15}$$

です。

追加問題2

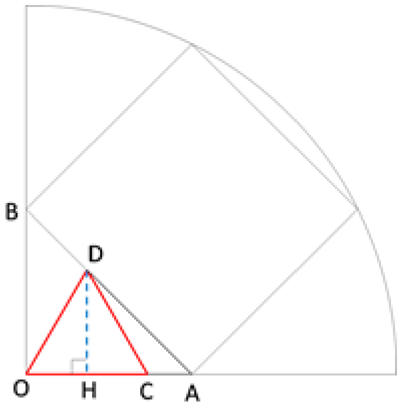


・正方形について

前問の正方形と合同なので、正方形の一辺の長さをaとすると、

$$a=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

です。



・正三角形について

図のように、各点に記号を付け、DからOCに垂直に下した点をHとすると、⊿ODHの各辺の比は、

$$OH:DH:OD=1:\sqrt{3}:2$$

なので、正三角形の一辺の長さをbとすると、

$$DH=\frac{\sqrt{3}}{2}OD \Rightarrow DH=\frac{\sqrt{3}}{2}b$$

$$OH=\frac{1}{2}OD \Rightarrow OH=\frac{1}{2}b$$

となりますが、$DH=AH$なので、

$$OA=OH+AH=OH+DH=\frac{\sqrt{3}}{2}b+\frac{1}{2}b=\frac{1+\sqrt{3}}{2}b$$

ここで、

$$OA=\frac{AB}{\sqrt{2}}=\frac{\frac{\sqrt{10}}{5}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

なので、

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2}b=\frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow b=\frac{\sqrt{5}(\sqrt{3}-1)}{5}$$

です。

以上より、

$$\text{正方形の1辺}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$\text{正三角形の1辺}=\frac{\sqrt{5}(\sqrt{3}-1)}{5}$$

です。

補足 プログラム

```
Q3(x, n)={
	Q3Sum(1, 1, floor(x^(1/3)), x, 0, vector(n));
}
Q3Sum(i, k, kmax, x, total, as)={
	local(p);
	if (k > kmax || total > x, return);
	if (i > length(as),
		if (total == x,
			for(p = 1, length(as), print1(as[p], " "));
			print();
		);
	,
		as[i] = k;
		Q3Sum(i + 1, k, kmax, x, total + k^3, as);
		Q3Sum(i, k + 1, kmax, x, total, as);
	);
}
```