## ● 問題 463 解答＜三角定規＞

［問題１］

(1) $f(x)=x^8-x+1$ とおく。

$-1$ の立方虚根を $\Omega$ とする。このとき，

$$\Omega^3+1=(\Omega+1)(\Omega^2-\Omega+1)=0 \quad \text{より} \quad \Omega^2-\Omega+1=0$$

$$f(\Omega)=\Omega^8-\Omega+1=(\Omega^4)^2-\Omega+1=(-\Omega)^2-\Omega+1=\Omega^2-\Omega+1=0$$

よって $x=\Omega$ は $f(x)=0$ の解であり，$f(x)$ は実係数多項式だから $x=\overline{\Omega}$ も解となり，$f(x)$ は $x^2-x+1$ を因数にもつ。除算を実行し，

$$f(x)=(x^2-x+1)(x^6+x^5-x^3-x^2+1)$$

$g(x)=x^6+x^5-x^3-x^2+1$ とおく。

$g(x)$ がさらに因数分解できるとすると，$x^6$ の係数および定数項からその形は，

（ⅰ）$(x^2+ax+1)(x^4+bx^3+cx^2+dx+1)$

（ⅱ）$(x^2+ax-1)(x^4+bx^3+cx^2+dx-1)$

（ⅲ）$(x^3+ax^2+bx+1)(x^3+cx^2+dx+1)$

（ⅲ）$(x^3+ax^2+bx-1)(x^3+cx^2+dx-1)$

の４つの場合に限られる。展開し各項の係数を比較することにより，

(ⅰ)のとき　$a+b=1$ …(i1),　$ab+c+1=0$ …(i2),　$ac+b+d=-1$ …(i3),　$ad+c+1=-1$ …(i4)

$a+d=0$ …(i5)

(i1)より $b=1-a$, (i5)より $d=-a$, を(i2)(i4)に代入し $a(1-a)+c=-1$, $-a^2+c=-2$

これらから $a=1$, $b=0$, $c=-1$, $d=-1$ となるが，この４数は(i3)を満たさない。

よって，(ⅰ)の形はない。

(ⅱ)のとき　$a+b=1$ …(ii1),　$ab+c-1=0$ …(ii2),　$ac-b+d=-1$ …(ii3),　$ad-c-1=-1$ …(ii4)

$a+d=0$ …(ii5)

(ii1)より $b=1-a$, (ii5)より $d=-a$, を(ii2)(ii4)に代入し $a(1-a)+c=1$, $-a^2-c=0$

これらから $2a^2-a+1=0$ となるが，この $a$ は実数値ではないため不適である。

よって，(ⅱ)の形はない。

(ⅲ)のとき　$a+c=1$ …(iii1),　$ac+b+d=0$ …(iii2),　$ad+bc+2=-1$ …(iii3)

$bd+a+c=-1$ …(iii4),　$b+d=0$ …(iii5)

(iii2)(iii5)より $ac=0$ ∴ $a=0$ *or* $c=0$

(iii1)(iii3)(iii5)より $(a,b,c,d)=(0,-3,1,3)$, $(1,3,0,-3)$ となるが，これらはともに(iii4)を満たさない。

よって，(ⅲ)の形はない。

(ⅳ)の場合も(ⅲ)と全く同様にして，これを満たす実数 $a,b,c,d$ が存在しない。

よって，$g(x)$ は実数係数の範囲ではこれ以上因数分解できない。

以上より，　$x^8-x+1=\boldsymbol{(x^2-x+1)(x^6+x^5-x^3-x^2+1)}$ …[答]

(2) (1)の結果で $x=2026$ とすれば，$2026^8-2026+1$ は $2026^2-2026+1$ を因数にもつ。

よって，$2026^8-2025$ は **合成数** である。…[答]

※ WolframAlpha によれば

$$2026^8-2025=4102651\times 69191214500746890901$$
$$=(7\times 19\times 109\times 283)\times(19\times 41\times 167\times 10443359\times 50928023)$$

となるようです。

［問題２］

$x^2+2x+4=0$ …①

これを解いて　$x=-1\pm\sqrt{3}\,i$

1 の立方虚根のひとつを　$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ とすると，$\omega^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$ だから，与式①の 2 解は $\alpha=2\omega$，$\beta=2\omega^2$ と書くことができる。

(1) $n$を整数 ($n\geqq 0$) として，$\alpha^n+\beta^n=\omega^n+\omega^{2n}$ …②

(ⅰ) $n=3k$ ($k$ : 整数, $k\geqq 0$) のとき

$\alpha^n+\beta^n=2^n(\omega^{3k}+\omega^{6k})=2^n(1+1)=2^{n+1}$ …③

(ⅱ) $n=3k+1$ のとき

$\alpha^n+\beta^n=2^n(\omega^{3k+1}+\omega^{6k+2})=2^n(\omega+\omega^2)=-2^n$ …④

(ⅲ) $n=3k+2$ のとき

$\alpha^n+\beta^n=2^n(\omega^{3k+2}+\omega^{6k+4})=2^n(\omega^2+\omega)=-2^n$ …⑤

以上より，　$n=3k$ ($k$ : 整数, $k\geqq 0$) のとき，　$\alpha^n+\beta^n=\boldsymbol{2^{n+1}}$

$n\neq 3k$ ($k$ : 整数, $k\geqq 0$) のとき，　$\alpha^n+\beta^n=\boldsymbol{-2^n}$　…[答]

(2) $2026\neq 3k$ ($k$ : 整数) だから，(1)の結果より　$|\alpha^{2026}+\beta^{2026}|=2^{2026}$ …⑥

$2026=405\cdot 5+1$ より，$2^{2026}=2^{405\cdot 5+1}=2\cdot(2^5)^{405}=2\cdot 32^{405}$

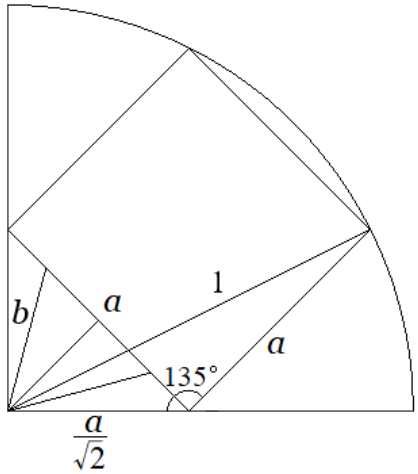
ここで，$32^m=(31+1)^m=\displaystyle\sum_{k=0}^{m}{}_{m-k}\mathrm{C}_k 31^{m-k}\cdot 1^k=(31\text{の倍数})+1$　($m$ : 整数, $m\geqq 0$)

であるから，$32^m$ を 31 で割った余り は 1。

よって，$2^{2026}=2\cdot 32^{405}$ を 31 で割った余り は　**2**　…[答]

《追加問題》

[問題１] 正方形の 1 辺を $a$ とすると, 右図のようになるから




$$\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2+a^2-2\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}\cdot a\cos 135^\circ=\frac{5}{2}a^2=1 \quad \therefore\ a=\sqrt{\frac{2}{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

正三角形の 1 辺を $b$ とすると, 図より

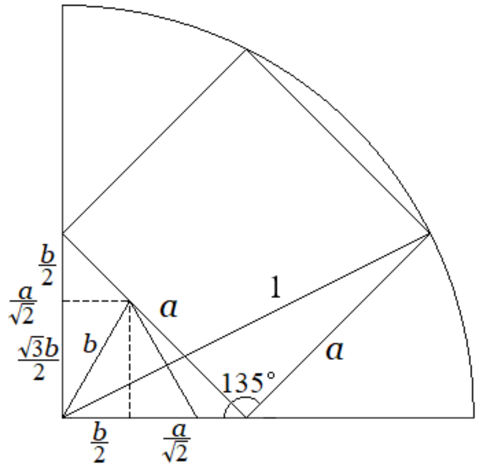
$$\frac{\sqrt{3}}{2}b=\frac{a}{2} \quad \therefore\ b=\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{30}}{15}$$

以上より，正方形の1辺 ： $\boldsymbol{\frac{\sqrt{10}}{5}}$ $(=0.7905\cdots)$

正三角形の1辺 ： $\boldsymbol{\frac{\sqrt{30}}{15}}$ $(=0.3651\cdots)$

…[答]

[問題２] 正方形は上と同じ。




正三角形の 1 辺を $b$ とすると, 図より

$$\frac{\sqrt{3}\,b}{2}+\frac{b}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}b=\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore\ b=\frac{2}{\sqrt{3}+1}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{5}$$

以上より，正方形の1辺 ： $\boldsymbol{\frac{\sqrt{10}}{5}}$ $(=0.7905\cdots)$

正三角形の1辺 ： $\boldsymbol{\frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{5}}$ $(=0.3273\cdots)$

…[答]