第 464 回　2026 の雑題 (2)

問題 1　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2026}$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ は何組あるか。

問題 2　$x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$ の 5 つの解を α_1，α_2，α_3，α_4，α_5 としたとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{5}{\alpha_k}^{2026}$ の値を求めよ。

問題 3　$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\sqrt{2}$ のとき，$x^{2026}+\dfrac{1}{x^{2026}}$ の値を求めよ。

問題 4　$2026^{20}+2027$ は素数か合成数か判定せよ。

解答

問題 1　与式を変形すると，$(x-2026)(y-2026)=2026^2$

$x-2026=X$，$y-2026=Y$ とおく。

$2026^2=2^2\cdot1013^2$ であるから，2026^2 の正の約数の個数は，$(2+1)(2+1)=9$ 個あり，それらを集合で表すと，

$A=\{1,\ 2,\ 2^2,\ 1013,\ 2\cdot1013,\ 2^2\cdot1013,\ 1013^2,\ 2\cdot1013^2,\ 2^2\cdot1013^2\}$ となる。

$a\in A$ に対して，$(X,\ Y)=\left(a,\ \dfrac{2026^2}{a}\right)$ である。負の約数も考えると，$(X,\ Y)=\left(-a,\ -\dfrac{2026^2}{a}\right)$ である。

$XY=2026^2$ となるのは，それぞれ 9 組ずつあるから，$(X,\ Y)$ の整数の組は $9+9=18$ 組考えられる。

実際に求めてみると，$(x,\ y)=(2026+X,\ 2026+Y)$ であるから，

$(x,\ y)=$

$(2026+1,\ 2026+2^2\cdot1013^2)=(2027,4106702)$，

$(2026+2,\ 2026+2\cdot1013^2)=(2028,2054364)$，

$(2026+2^2,\ 2026+1013^2)=(2030,1028195)$，

$(2026+1013,\ 2026+2^2\cdot1013)=(3039,6078)$，

$(2026+2\cdot1013,\ 2026+2\cdot1013)=(4052,4052)$，

$(2026+2^2\cdot1013,\ 2026+1013)=(6078,3039)$，

$(2026+1013^2,\ 2026+2^2)=(1028195,2030)$，

$(2026+2\cdot1013^2,\ 2026+2)=(2054364,2028)$，

$(2026+2^2\cdot1013^2,\ 2026+1)=(4106702,2027)$；

$(2026-1,\ 2026-2^2\cdot1013^2)=(2025,4102650)$，

$(2026-2,\ 2026-2\cdot1013^2)=(2024,2050312)$，

$(2026-2^2,\ 2026-1013^2)=(2022,1024143)$，

$(2026-1013,\ 2026-2^2\cdot1013)=(1013,2026)$，

$(2026-2\cdot1013,\ 2026-2\cdot1013)=(0,0)$　これは不適，

$(2026-2^2\cdot1013,\ 2026-1013)=(-2026,1013)$，

$(2026-1013^2,\ 2026-2^2)=(-1024143,2022)$，

$(2026-2\cdot1013^2,\ 2026-2)=(-2050312,2024)$，

$(2026-2^2\cdot1013^2,\ 2026-1)=(-4102650,2025)$

よって，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2026}$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ は 17 組　答

問題2　$x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$ のとき，$x=1$ は明らかに解ではない。$\therefore x-1 \fallingdotseq 0$

$$x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=\frac{x^6-1}{x-1}=\frac{(x^3-1)(x^3+1)}{x-1}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)}{x-1}$$

$$=(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)=0$$ より，$x=-1$，ω，ω^2，$-\omega$，$-\omega^2$

ただし，ω は，$x^2+x+1=0$ の解で，$\omega^2+\omega+1=0$，$\omega^3=1$ である。

$$\sum_{k=1}^{5}{\alpha_k}^{2026}=(-1)^{2026}+\omega^{2026}+(\omega^2)^{2026}+(-\omega)^{2026}+(-\omega^2)^{2026}$$

$$=1+\omega+\omega^2+\omega+\omega^2 \quad (\because \omega^3=1)$$

$$=-1 \quad (\because \omega^2+\omega+1=0)$$ 答

問題3　$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\sqrt{2}$ より，$x^4-\sqrt{2}\,x^2+1=0$　$\therefore x^2=\dfrac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2}\,i}{2}$

$x^2=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i}{2}$ のとき，$\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i}{2}$，$x^2=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i}{2}$ のとき，$\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i}{2}$ であるから，

$$x^{2026}+\frac{1}{x^{2026}}=(x^2)^{1013}+\left(\frac{1}{x^2}\right)^{1013}=\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i}{2}\right)^{1013}+\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i}{2}\right)^{1013}$$

$$=\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{1013}+\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}^{1013}=2\cos\frac{1013\pi}{4}=2\cos\left(252\pi+\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$=2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\sqrt{2}$$ 答

補足

(1)　$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\sqrt{2}$ のとき，$x^{2n}+\dfrac{1}{x^{2n}}=2\cos\dfrac{n\pi}{4}=\begin{cases}2 & (n=8kのとき)\\ \sqrt{2} & (n=8k+1のとき)\\ 0 & (n=8k=2のとき)\\ -\sqrt{2} & (n=8k+3\ のとき)\\ -2 & (n=8k+4のとき)\\ -\sqrt{2} & (n=8k+5のとき)\\ 0 & (n=8k+6のとき)\\ \sqrt{2} & (n=8k+7のとき)\end{cases}$

(2)　$x^2+\dfrac{1}{x^2}=1$ のとき，$x^{2n}+\dfrac{1}{x^{2n}}=2\cos\dfrac{n\pi}{3}$

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\sqrt{3}$ のとき，$x^{2n}+\dfrac{1}{x^{2n}}=2\cos\dfrac{n\pi}{6}$　など

問題4　$2026^{20}+2027=2026^{20}+2026+1$ であるから，関数 $f(x)=x^{20}+x+1$ を考える。

ω を1の虚数立方根とすると，$\omega^2+\omega+1=0$，$\omega^3=1$ である。

$f(\omega)=\omega^{20}+\omega+1=\omega^2+\omega+1=0$ より，$f(x)$ は x^2+x+1 を因数にもつ。

$f(x)$ を x^2+x+1 で割ったときの商を $g(x)$ とすると，$f(x)=(x^2+x+1)g(x)$

$2026^{20}+2027=f(2026)=(2026^2+2026+1)g(2026)=4106703\,g(2026)$

よって，$2026^{20}+2027$ は合成数である。　答

補足　$f(x)=(x^2+x+1)(x^{18}-x^{17}+x^{15}-x^{14}+x^{12}-x^{11}+x^9-x^8+x^6-x^5+x^3-x^2+1)$ より，

$f(2026)=4106703\times 33059442459704575012779816241693533041651982838862210970090 1$

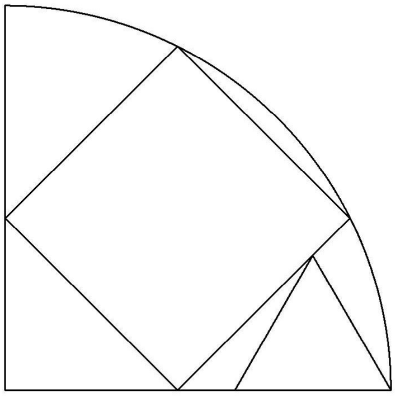
$=3\cdot 61\cdot 22441\times 17\cdot 29927\cdot 7974731\cdot 7696120477411\cdot 10587551108614655783053776426202979$

$=3\cdot 17\cdot 61\cdot 22441\cdot 29927\cdot 7974731\cdot 7696120477411\cdot 10587551108614655783053776426202979$

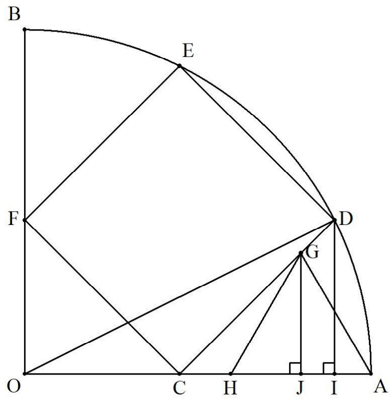
追加問題１

半径１の四分円内に，図のように正方形と正三角形が配置されている。

それぞれの １辺の長さを求めよ。



解答　正方形と正三角形の１辺の長さをそれぞれ a ， b とおき，図のように記号を付ける。



△FOC，△CID は合同な直角二等辺三角形であるから，OC＝CI＝ID＝ $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

△DOI について，OI＝ $\dfrac{a}{\sqrt{2}}+\dfrac{a}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\,a$ ，ID＝ $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ ，DO＝１であるから，

三平方の定理より，$(\sqrt{2}\,a)^2+\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2=1^2$　$\therefore a^2=\dfrac{2}{5}$

$a>0$ より， $a=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ （≒ 0.632456 ）

次に，△AGH は正三角形であるから，GJ＝ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}b$ ，JA＝ $\dfrac{b}{2}$

△CJG は直角二等辺三角形であるから，CJ＝GJ＝ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}b$

OA＝OC＋CJ＋JA＝ $\dfrac{\sqrt{5}}{5}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}b+\dfrac{b}{2}=1$

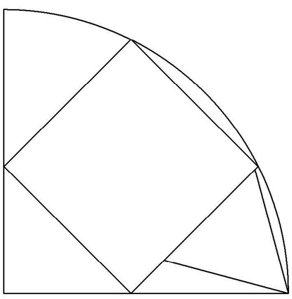
$\therefore b=\dfrac{(\sqrt{3}-1)(5-\sqrt{5})}{5}=\dfrac{-5+5\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{15}}{5}$ （≒ 0.404668 ）

よって，求める１辺の長さは，正方形： $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ ，正三角形： $\dfrac{-5+5\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{15}}{5}$　答

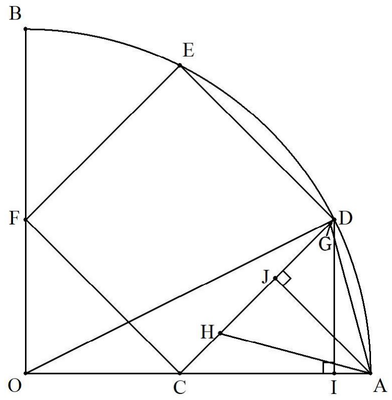
追加問題２

半径１の四分円内に，図のように正方形と正三角形が配置されている。

それぞれの１辺の長さを求めよ。



解答　正方形と正三角形の１辺の長さをそれぞれ a，b とおき，
図のように記号を付ける。



$\triangle$FOC，$\triangle$CID は合同な直角二等辺三角形であるから，$\mathrm{OC}=\mathrm{CI}=\mathrm{ID}=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

$\triangle$DOI について，$\mathrm{OI}=\dfrac{a}{\sqrt{2}}+\dfrac{a}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\,a$，$\mathrm{ID}=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$，DO＝1 であるから，

三平方の定理より，$(\sqrt{2}\,a)^2+\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2=1^2$　$\therefore a^2=\dfrac{2}{5}$

$a>0$ より，$a=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$　（$\fallingdotseq 0.632456$）

次に，$\triangle$AGH は正三角形であるから，$\mathrm{AJ}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}b$

与えられた図形を座標平面の第１象限におく。O$(0,\ 0)$，A$(1,\ 0)$，B$(0,\ 1)$，C$\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5},\ 0\right)$である。

直線 CD は傾きが１で，点 C を通るから，その方程式は，$x-y-\dfrac{\sqrt{5}}{5}=0$　…①と表される。

点 A と①の距離は AJ であるから，$\mathrm{AJ}=\dfrac{\left|1-0-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}b$　$\therefore b=\dfrac{5\sqrt{6}-\sqrt{30}}{15}$　（$\fallingdotseq 0.451348$）

よって，求める１辺の長さは，正方形：$\dfrac{\sqrt{10}}{5}$，正三角形：$\dfrac{5\sqrt{3}-\sqrt{15}}{15}$　答

（2026/2/1　ジョーカー）