問題1　与式をxについて解くと、

$$x=\frac{2026y}{y-2026}=2026+\frac{2026^2}{y-2026}$$

ですが、xが整数なので、$y-2026$は2026^2の約数でなければなりません。すると、$2026=2\times 1013$なので、$2026^2=2^2\times 1013^2$と素因数分解できますから、その正の約数は次の直積なので、その個数は9組です。

$$\{2^0,2^1,2^2\}\times\{1013^0,1013^1,1013^2\}$$

負の約数についても同じことが言えて、合計 18 組ですが、補足1に示したように、$(x,y)=(0,0)$の組は与式が成り立ちません。これを除いて、求める(x,y)は17組です。

問題2 $x=1$とすると、$1^5+1^4+1^3+1^2+1+1=6\neq 0$なので、$x\neq 1$です。与式を等比数列に見立てると、

$$x^0+x^1+x^2+x^3+x^4+x^5=\frac{x^6-1}{x-1}=0\Rightarrow x^6=1$$

です。6乗すると1になるので、これを使って、次数を下げます。すると、$2026\equiv 4 \pmod 6$なので、

$$S=\sum_{k=1}^{5}{\alpha_k}^{2026}=\sum_{k=1}^{5}{\alpha_k}^4$$

です。ここで、補足2に示したように、$x^n-1=0$の解のk乗和は、kがnの倍数でなければ0となりますから、$x^6=1$の解$1,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$の$4$乗和も$0$です。つまり、

$$1+{\alpha_1}^4+{\alpha_2}^4+{\alpha_3}^4+{\alpha_4}^4+{\alpha_5}^4=0\Rightarrow {\alpha_1}^4+{\alpha_2}^4+{\alpha_3}^4+{\alpha_4}^4+{\alpha_5}^4=-1$$

です。

問題3　やり方はいくつか考えられますが、複素数を使うのが最も簡単で、与式を

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\sqrt{2}=2\cos\frac{\pi}{4}$$

と考ます。次に補足3で示した次式を使って、三角関数に変形します。

$$x^n+\frac{1}{x^n}=2\cos(n\theta)$$

与式は上式で$n=2$とした場合なので、その偏角は、

$$x^2+\frac{1}{x^2}=2\cos(2\theta)=2\cos\frac{\pi}{4}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{8}$$

です。よって、一般式は、

$$x^n+\frac{1}{x^n}=2\cos\left(\frac{n\pi}{8}\right)$$

と表すことができます。この式で、$n=2026$を代入すれば、

$$x^{2026}+\frac{1}{x^{2026}}=2\cos\left(\frac{2026\pi}{8}\right)=2\cos\left(\frac{1013\pi}{4}\right)$$

ですが、三角関数の周期が2πで、$1013\equiv 5 \pmod 8$ですから、

$$x^{2026}+\frac{1}{x^{2026}}=2\cos\left(\frac{1013\pi}{4}\right)=2\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)=2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\sqrt{2}$$

となります。

問題4　小さい素数$2,3,\cdots$を法として、順に調べます。

・素数2の場合

$$2026^{20}+2027\equiv 0+1=1 \pmod 2$$

となり、2では割り切れません。

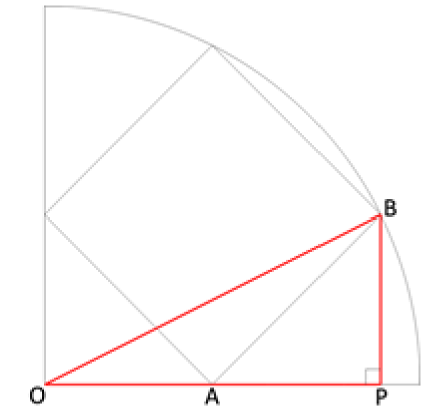
・素数3の場合

2026を3で割った余りは、2026の各桁の和10を3で割った余り1に等しいので、

$$2026^{20}+2027\equiv 1^{20}+2=1+2=3\equiv 0 \pmod 3$$

となり、3より大きい数が3で割り切れるので、合成数です。

追加問題1



・正方形について

図のように、各点に記号を付け、BからOAに垂直に下した点をP、正方形の一辺の長さをaとして、⊿OPBに三平方の定理を適用すると、

$$\mathrm{OP}^2+\mathrm{PB}^2=\mathrm{OB}^2 \Rightarrow (\mathrm{OA}+\mathrm{AP})^2+\mathrm{PB}^2=\mathrm{OB}^2$$

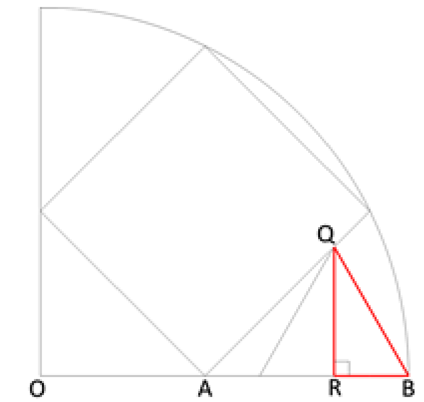
です。ここで、

$$\mathrm{OA}=\mathrm{AP}=\mathrm{PB}=\frac{\mathrm{a}}{\sqrt{2}}$$

なので、

$$\left(\frac{\mathrm{a}}{\sqrt{2}}+\frac{\mathrm{a}}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{a}}{\sqrt{2}}\right)^2=1^2 \Rightarrow \mathrm{a}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

です。



・正三角形について

図のように、各点に記号を付け、QからABに垂直に下した点をRとすると、⊿BQRの各辺の比は、

$$\mathrm{BR}:\mathrm{QR}:\mathrm{BQ}=1:\sqrt{3}:2$$

なので、正三角形の一辺の長さをbとすると、

$$\mathrm{BR}=\frac{1}{2}\mathrm{BQ}=\frac{b}{2}$$

$$\mathrm{AR}=\mathrm{QR}=\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{BQ}=\frac{\sqrt{3}}{2}b$$

です。ここで、

$$\mathrm{OB}=\mathrm{OA}+\mathrm{AR}+\mathrm{BR}=\frac{\mathrm{a}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}b+\frac{\sqrt{3}}{2}b=1$$

なので、

$$\mathrm{b}=\frac{(\sqrt{3}-1)(2-\sqrt{2}a)}{2}=\frac{(\sqrt{3}-1)\left(2-\sqrt{2}\frac{\sqrt{10}}{5}\right)}{2}$$

$$=\frac{5\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{3}\sqrt{5}-5}{5}$$

です。

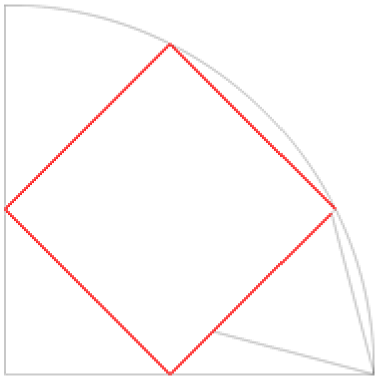
以上より、

$$\text{正方形の1辺}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$\text{正三角形の1辺}=\frac{5\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{3}\sqrt{5}-5}{5}=0.4046677\cdots$$

です。

追加問題2

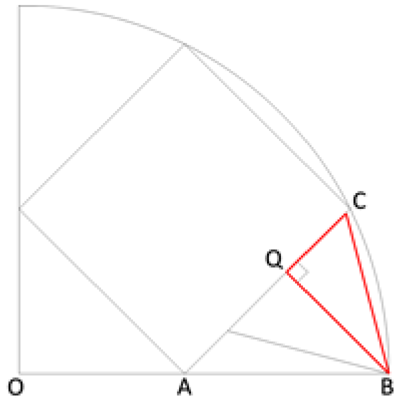


・正方形について

前問の正方形と合同なので、正方形の一辺の長さをaとすると、

$$a = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

です。



・正三角形について

図のように、各点に記号を付け、BからACに垂直に下した点をQとすると、⊿BCQの各辺の比は、

$$CQ : BQ : BC = 1 : \sqrt{3} : 2$$

なので、正三角形の一辺の長さをbとすると、

$$BQ = \frac{\sqrt{3}}{2}BC = \frac{\sqrt{3}}{2}b$$

$$AB = \sqrt{2}BQ = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2}b$$

です。ここで、

$$OB = OA + AB = \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2}b = \frac{5\sqrt{2}\sqrt{3}b + 2\sqrt{5}}{10} = 1$$

なので、

$$b = \frac{\sqrt{3}\left(5\sqrt{2} - \sqrt{10}\right)}{15}$$

です。

以上より、

$$正方形の1辺 = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$正三角形の1辺 = \frac{\sqrt{3}\left(5\sqrt{2} - \sqrt{10}\right)}{15} = 0.4513482\cdots$$

です。

補足1

$y-2026$	y	$x=\dfrac{2026y}{y-2026}$
1	2027	4106702
2	2028	2054364
4	2030	1028195
1013	3039	6078
2026	4052	4052
4052	6078	3039
1026169	1028195	2030
2052338	2054364	2028
4104676	4106702	2027

$y-2026$	y	$x=\dfrac{2026y}{y-2026}$
−1	2025	−4102650
−2	2024	−2050312
−4	2022	−1024143
−1013	1013	−2026
−2026	0	0
−4052	−2026	1013
−1026169	−1024143	2022
−2052338	−2050312	2024
−4104676	−4102650	2025

※色付けした組は除外

補足2

方程式$x^n-1=0$の解は全部でn個あります。そのうちの基本解（1のn乗根）をωとします。すると、他の解はωの累乗で表わすことができるので、解の全体は、

$$1, \omega, \omega^2, \omega^3, \cdots, \omega^{n-1}$$

です。次に、各解をk乗して足し合わせたものをS_kとすると、

$$S_k = 1^k + (\omega)^k + (\omega^2)^k + (\omega^3)^k + \cdots + (\omega^{n-1})^k$$

$$= 1^k + \omega^k + \left(\omega^k\right)^2 + \left(\omega^k\right)^3 + \cdots + \left(\omega^k\right)^{kn-1}$$

$$= \frac{1-\left(\omega^k\right)^n}{1-\omega^k} = \frac{1-(\omega^n)^k}{1-\omega^k}$$

ここで、$\omega^n = 1$なので、分子 $=0$となり、$S_k = 0$となります。ただし、kがnの倍数なら、$\omega^k = 1$となるので、上式が成り立ちません。

以上より、$x^n-1=0$の解のk乗和は、kがnの倍数でなければ0になります。

補足３

オイラーの公式を使って、大きさ1の複素数xを極形式で表すと、

$$\mathrm{x} = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$

ですが、xの逆数は偏角の符号を逆にすればよいので、

$$\frac{1}{x} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$$

都合の良いことに、この 2 式を足すと虚数部が消えて、

$$\mathrm{x} + \frac{1}{x} = (\cos\theta + i\sin\theta) + (\cos\theta - i\sin\theta) = 2\cos\theta$$

一般化(n乗)すると、ド・モアブルの定理により、$\mathrm{x}^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$なので、

$$x^{\mathrm{n}} + \frac{1}{x^{\mathrm{n}}} = 2\cos(n\theta)$$

です。