● 問題 464 解答＜三角定規＞

[問題１]　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2026}$　…①

① ⇔ $xy-2026(x+y)=0$ …② かつ $xy\neq 0$　∴

② ⇔ $(x-2026)(y-2026)=2026^2=2^2\cdot 1013^2$ …②′

②を満たす整数 $(x-2026,\ y-2026)$ の組は, ± を含めて $2\cdot 3\cdot 3=18$ 組あるが,

$=(-2026,\ -2026)$ は $(x,\ y)=(0,\ 0)$ となり不適。よって，求める組数は **17 組** …[答]

[問題２]　$x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$ …①

①は $\dfrac{x^6-1}{x-1}=0$ と書けるから，①の 5 つの解 α_k は 1 の 6 乗根から 1を除いたもので

$$\alpha_k=\cos\frac{k\pi}{3}+i\sin\frac{k\pi}{3}\quad (k=1,2,\cdots,5)\ \cdots②$$

と書くことができる。

よって，　$\alpha_k^{2026}=\cos\left(2026\cdot\dfrac{k\pi}{3}\right)+i\sin\left(2026\cdot\dfrac{k\pi}{3}\right)$ …③

ここで　$2026=337\cdot 6+4$　だから

$$2026\cdot\frac{k\pi}{3}=337k\cdot 2\pi+k\pi+\frac{k\pi}{3}\ \cdots④$$

③④より，　$\alpha_1^{2026}=-\alpha_1=\alpha_4$,　$\alpha_2^{2026}=\alpha_2$,　$\alpha_3^{2026}=-\alpha_3$,　$\alpha_4^{2026}=\alpha_4$,　$\alpha_5^{2026}=-\alpha_5=\alpha_2$

よって，　$\displaystyle\sum_{k=1}^{5}\alpha_k^{2026}=2(\alpha_2+\alpha_4)-\alpha_3=\mathbf{-1}$　…[答]

[問題３]　$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\sqrt{2}$　…①

①より，　$x^4-\sqrt{2}\,x^2+1=0$　∴ $x^2=\dfrac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2}\,i}{2}=\cos\dfrac{\pi}{4}\pm i\sin\dfrac{\pi}{4}$

∴ $x^{2026}=(x^2)^{1013}=\cos\left(1013\cdot\dfrac{\pi}{4}\right)\pm i\sin\left(1013\cdot\dfrac{\pi}{4}\right)$

$1013\cdot\dfrac{\pi}{4}=126\cdot 2\pi+\dfrac{5\pi}{4}$ だから，　$x^{2026}=\cos\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)\pm i\sin\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)$

∴ $\dfrac{1}{x^{2026}}=\cos\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)-(\pm)\,i\sin\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)$　∴ $x^{2026}+\dfrac{1}{x^{2026}}=2\cos\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)=\mathbf{-\sqrt{2}}$　…[答]

［問題４］　$f(x)=x^{20}+x+1$　とおく。

1 の立方虚根を ω とする。このとき，

$$\omega^3-1=(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0 \quad \text{より} \quad \omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0$$

$$f(\omega)=\omega^{20}+\omega+1=(\omega^3)^6\cdot\omega^2+\omega+1=\omega^2+\omega+1=0$$

よって　$x=\omega$　は　$f(x)=0$　の解であり，$f(x)$　は実係数多項式だから　$x=\overline{\omega}$　も解となり，$f(x)$　は x^2+x+1　を因数にもつ。

$$\therefore\ f(x)=(x^2+x+1)g(x) \quad \therefore\ f(2026)=2026^{20}+2026+1=(2026^2+2026+1)g(2026)$$

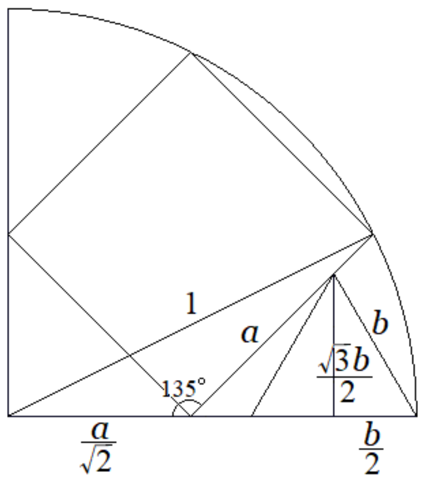
$$\therefore\ 2026^{20}+2027=4106703g(2026)$$

以上より，$2026^{20}+2027$　は　**合成数**　である。…[答]

《追加問題》

［問題１］正方形の 1 辺を a とすると, 右図のようになるから

$$\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2+a^2-2\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}\cdot a\cos 135^\circ=\frac{5}{2}a^2=1 \quad \therefore\ a=\sqrt{\frac{2}{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$



正三角形の 1 辺を b とすると, 図より

$$1-\frac{b}{2}-\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}\,b}{2} \quad \therefore\ \frac{1+\sqrt{3}}{2}b=1-\frac{a}{\sqrt{2}}=1-\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore\ b=\frac{2}{\sqrt{3}+1}\cdot\frac{5-\sqrt{5}}{5}=\frac{(\sqrt{3}-1)(5-\sqrt{5})}{5}$$

$$=\frac{5\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{15}-5}{5}$$

以上より，正方形の1 辺 ： $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{10}}{5}}$　$(=0.7905\cdots)$

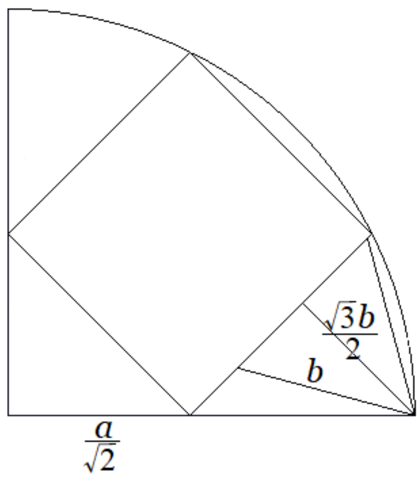
正三角形の1 辺 ： $\boldsymbol{\dfrac{5\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{15}-5}{5}}$　$(=0.4046\cdots)$

…[答]

［問題２］正方形は上と同じ。

正三角形の 1 辺を b とすると, 図より

$$\frac{\sqrt{3}\,b}{2}\cdot\sqrt{2}+\frac{a}{\sqrt{2}}=1 \quad \therefore\ b=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)=\frac{5\sqrt{6}-\sqrt{30}}{15}$$



以上より，正方形の1 辺 ： $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{10}}{5}}$　$(=0.7905\cdots)$

正三角形の1 辺 ： $\boldsymbol{\dfrac{5\sqrt{6}-\sqrt{30}}{15}}$　$(=0.4513\cdots)$

…[答]